NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	i : unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais	$\|z\|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos	$\operatorname{Re} z$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$	$\operatorname{Im} z$: parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$
$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < +\infty\}$	$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
$A \backslash B = \{x \in A;\ x \notin B\}$	A^t : transposta da matriz A
A^C : complementar do conjunto A	$\det A$: determinante da matriz A

$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$tr A$: soma dos elementos da diagonal principal da matriz quadrada A

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1. Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \backslash B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

A ( ) 0. B ( ) 1. C ( ) 2. D ( ) 4. E ( ) 8.

Questão 2. Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor "flex" (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor "flex" sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

A ( ) 246. B ( ) 252. C ( ) 260. D ( ) 268. E ( ) 284.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ uma função satisfazendo às condições:

$$f(x + y) = f(x) f(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f(x) \neq 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Das afirmações:

I. f pode ser ímpar.

II. $f(0) = 1$.

III. f é injetiva.

IV. f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

é (são) falsa(s) apenas

A ( ) I e III. B ( ) II e III. C ( ) I e IV. D ( ) IV. E ( ) I.

Questão 4. Se $a = \cos\dfrac{\pi}{5}$ e $b = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$, então, o número complexo $\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

A ( ) $a + bi$. B ( ) $-a + bi$. C ( ) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$.

D ( ) $a - bi$. E ( ) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

Questão 5. O polinômio de grau 4

$$(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c),$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

A ( ) $3 + \sqrt{3}$. B ( ) $2 + 3\sqrt{3}$. C ( ) $2 + \sqrt{2}$. D ( ) $1 + 2\sqrt{2}$. E ( ) $2 + 2\sqrt{2}$.

Questão 6. Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f \circ g$ é igual a

A ( ) 1. B ( ) 2. C ( ) 3. D ( ) 4. E ( ) 5.

Questão 7. Suponha que os coeficientes reais a e b da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ são tais que a equação admite solução não real r com $|r| \neq 1$. Das seguintes afirmações:

I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.

II. As raízes podem ser duplas.

III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.

D ( ) apenas II e III. E ( ) nenhuma.

Questão 8. Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\dfrac{a}{b}$ é igual a

A ( ) -3. B ( ) $-\dfrac{1}{3}$. C ( ) $\dfrac{1}{3}$. D ( ) 1. E ( ) 3.

Questão 9. Dados $A \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0 \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX = b$ quando $\sqrt{(AX_0 - b)^t(AX_0 - b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a sua melhor aproximação quadrática é

A ( ) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. B ( ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. C ( ) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. D ( ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. E ( ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Questão 10. O sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

com $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é

A ( ) determinado.
B ( ) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.
C ( ) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
D ( ) impossível.
E ( ) indeterminado.

Questão 11. Seja $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $trA = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

A ( ) $\frac{101}{25}$. B ( ) $\frac{121}{25}$. C ( ) 5. D ( ) $\frac{49}{9}$. E ( ) $\frac{25}{4}$.

Questão 12. Um certo exame de inglês é utilizado para classificar a proficiência de estrangeiros nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% são bem avaliados neste exame. Entre os não proficientes em inglês, 7% são eventualmente bem avaliados. Considere uma amostra de estrangeiros em que 18% são proficientes em inglês. Um estrangeiro, escolhido desta amostra ao acaso, realizou o exame sendo classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

A ( ) 73%. B ( ) 70%. C ( ) 68%. D ( ) 65%. E ( ) 64%.

Questão 13. Considere o triângulo ABC de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha = C\widehat{A}B$, $\beta = A\widehat{B}C$ e $\gamma = B\widehat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite c como raiz dupla, pode-se afirmar que

A ( ) $\alpha = 90^o$.
B ( ) $\beta = 60^o$.
C ( ) $\gamma = 90^o$.
D ( ) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45^o$.
E ( ) O triângulo é retângulo e b é hipotenusa.

Questão 14. No plano, considere S o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta $t : x = 1$ e ao ponto $A = (3, 2)$ é igual a 4. Então, S é

A ( ) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(2, 1)$.
B ( ) uma circunferência de raio 1 e centro $(1, 2)$.
C ( ) uma hipérbole.
D ( ) uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2.
E ( ) uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1.

Questão 15. Do triângulo de vértices A, B e C, inscrito em uma circunferência de raio $R = 2\ cm$, sabe-se que o lado $\overline{BC}$ mede $2\ cm$ e o ângulo interno $A\hat{B}C$ mede 30^o. Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em cm, igual a

A ( ) $2 - \sqrt{3}$. B ( ) $\dfrac{1}{3}$. C ( ) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. D ( ) $2\sqrt{3} - 3$. E ( ) $\dfrac{1}{2}$.

Questão 16. A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a

A ( ) 2. B ( ) $\dfrac{3}{2}$. C ( ) 1. D ( ) $\dfrac{3}{4}$. E ( ) $\dfrac{1}{2}$.

Questão 17. A expressão

$$\frac{2\left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{11}{2}\pi\right) + \operatorname{cotg}^2 x\right] \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

é equivalente a

A ( ) $[\cos x - \operatorname{sen}^2 x] \operatorname{cotg} x$. B ( ) $[\operatorname{sen} x + \cos x] \operatorname{tg} x$. C ( ) $[\cos^2 x - \operatorname{sen} x] \operatorname{cotg}^2 x$.
D ( ) $[1 - \operatorname{cotg}^2 x] \operatorname{sen} x$. E ( ) $[1 + \operatorname{cotg}^2 x] [\operatorname{sen} x + \cos x]$.

Questão 18. Sejam C uma circunferência de raio $R > 4$ e centro $(0, 0)$ e $\overline{AB}$ uma corda de C. Sabendo que $(1, 3)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, então uma equação da reta que contém $\overline{AB}$ é

A ( ) $y + 3x - 6 = 0$. B ( ) $3y + x - 10 = 0$. C ( ) $2y + x - 7 = 0$.
D ( ) $y + x - 4 = 0$. E ( ) $2y + 3x - 9 = 0$.

Questão 19. Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de $8\ cm$ de altura e de 60^o de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}\ cm$ do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3, é igual a

A ( ) $\dfrac{416}{9}\pi$. B ( ) $\dfrac{480}{9}\pi$. C ( ) $\dfrac{500}{9}\pi$. D ( ) $\dfrac{512}{9}\pi$. E ( ) $\dfrac{542}{9}\pi$.

Questão 20. Os pontos $A = (3, 4)$ e $B = (4, 3)$ são vértices de um cubo, em que $\overline{AB}$ é uma das arestas. A área lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médios da face do cubo é igual a

A ( ) $\sqrt{8}$. B ( ) 3. C ( ) $\sqrt{12}$. D ( ) 4. E ( ) $\sqrt{18}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Seja S o conjunto solução da inequação

$$(x-9)\left|\log_{x+4}(x^3-26x)\right| \leq 0.$$

Determine o conjunto S^C.

Questão 22. **Sejam** $x, y \in \mathbb{R}$ e $w = x^2(1+3i) + y^2(4-i) - x(2+6i) + y(-16+4i) \in \mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \operatorname{Re} w \leq -13 \ e \ \operatorname{Im} w \leq 4\}.$$

Questão 23. Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

a) Mostre que f é injetora.

b) Determine $D = \{\ f(x);\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}\ \}$ e $f^{-1}:\ D \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Questão 24. Suponha que a equação algébrica

$$x^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0$$

tenha coeficientes reais $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que $\beta,\ \gamma_n \in \mathbb{R}$ e os $\gamma_n,\ n = 1, 2,\ ..., 11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$. II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$. III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

Questão 25. Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

Questão 26. Sejam $A, B \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então $\det A = \det B = 0$.

Questão 27. Sabendo que $\operatorname{tg}^2\left(x + \dfrac{1}{6}\pi\right) = \dfrac{1}{2}$, para algum $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\pi\right]$, determine $\operatorname{sen} x$.

Questão 28. Dadas a circunferência $C:\ (x-3)^2+(y-1)^2=20$ e a reta $r:\ 3x-y+5=0$, considere a reta t que tangencia C, forma um ângulo de 45^o com r e cuja distância à origem é $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação da reta t.

Questão 29. Considere as n retas

$$r_i : y = m_i x + 10,\ \ i = 1, 2, ..., n;\ \ n \geq 5,$$

em que os coeficientes m_i, em ordem crescente de i, formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de q.

Questão 30. A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida a do apótema da base.

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
VESTIBULAR 2009

GABARITO

Matemática	
1	C
2	B
3	E
4	B
5	E
6	C
7	A
8	B
9	E
10	D
11	A
12	B
13	E
14	D
15	D
16	E
17	A
18	B
19	A
20	C

ITA Matemática 2009 - Respostas

Discursivas

21.
Primeiramente vamos analisar as condições de existência (Domínio):

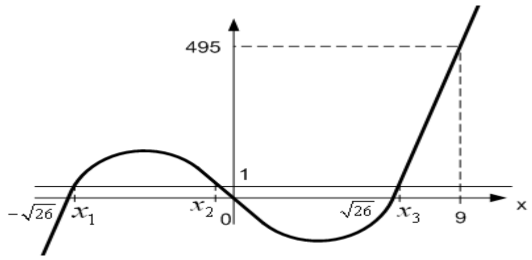
1) $x^3 - 26x > 0 \Rightarrow -\sqrt{26} < x < 0$ ou $x > \sqrt{26}$
2) $x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$
3) $x + 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq -3$

Resolvendo a inequação, temos:

S_1: $x^3 - 26x = 1$ e $x + 4 \neq 1$ (ou seja quando o $\left|\log_{x+4}\left(x^3 - 26x\right)\right| = 0$)

Ou S_2: $x - 9 \leq 0$

S_1: Para obter os valores de x que satisfazem $x^3 - 26x = 1$ é mais fácil verificar no seguinte gráfico da função f(x) = $x^3 - 26x$ a intersecção com a reta y = 1 em três pontos $x_1, x_2\ e\ x_3$ todos eles menores que 9,



ou seja

$S_1 \subset S_2$ então $S_1 \cup S_2 = S_2 = x - 9 \leq 0$.

E S é a intersecção de S_2 e o Domínio, então:

$$S = \left\{x \in IR \mid -4 < x < 0\ e\ x \neq -3\ ou\ \sqrt{26} < x \leq 9\right\}$$

E o seu complementar é $S^C = \mathbb{R} - S$, ou seja,

$$\boxed{S^C = \left\{x \in IR \mid x \leq -4\ ou\ x = -3\ ou\ 0 \leq x \leq \sqrt{26}\ ou\ x > 9\right\}}$$

22.
O número complexo w pode ser reescrito como:

$$w = x^2 + 3x^2 i + 4y^2 - y^2 i - 2x - 6xi - 16y + 4yi$$

$$\Leftrightarrow w = \underbrace{x^2 + 4y^2 - 2x - 16y}_{\mathrm{Re}(w)} + \underbrace{\left(3x^2 - y^2 - 6x + 4y\right)}_{\mathrm{Im}(w)} i$$

Temos:

$$\boxed{\mathrm{Re}(w) \leq -13}$$

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y \leq -13$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 16y + 16 \leq -13 + 1 + 16$$

$$(x-1)^2 + 4.(y-2)^2 \leq 4$$

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{2^2} + (y-2)^2 \leq 1}$$

A inequação acima compreende a parte interna de uma elipse com centro $C(1,2)$, eixo maior igual a 4 e eixo menor igual a 2.

Ainda: $\boxed{\mathrm{Im}(w) \leq 4}$

$$3x^2 - y^2 - 6x + 4y \leq 4$$

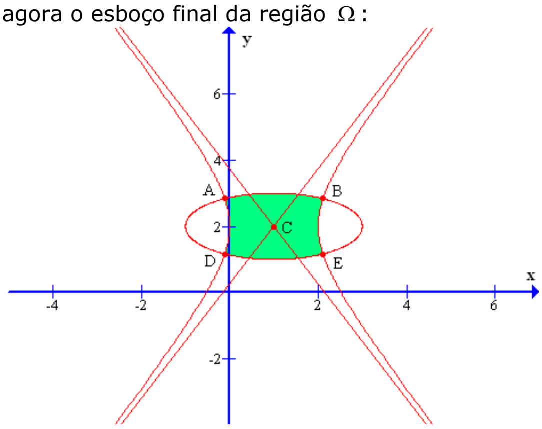
$$3x^2 - 6x + 3 - \left(y^2 - 4y + 4\right) \leq 4 + 3 - 4$$

$$3.(x-1)^2 - (y-2)^2 \leq 3$$

$$\boxed{(x-1)^2 - \frac{(y-2)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \leq 1}$$

A inequação acima compreende a parte interna de uma hipérbole com centro $C(1,2)$ e eixo real igual a 2, e eixo conjugado medindo $2\sqrt{3}$.

Veja agora o esboço final da região Ω:



A questão exigia somente o esboço e não os pontos de intersecção.

23.

a) $f(x) = \dfrac{2x + 2 + 1}{x + 1} = \dfrac{2(x+1)}{x+1} + \dfrac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$$

Sejam x_1 e $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tal que $x_1 \neq x_2$

Somando-se 1: $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$

Invertendo-se: $\dfrac{1}{x_1 + 1} \neq \dfrac{1}{x_2 + 1}$

Somando-se 2: $2 + \dfrac{1}{x_1 + 1} \neq 2 + \dfrac{1}{x_2 + 1}$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ou seja $f(x)$ é INJETORA.

b) O que se pede é a imagem de f ou seja, o domínio de f^{-1} e a própria f^{-1}.

$f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$, substituindo x por $f^{-1}(x)$ e $f(x)$ por x:

$\Rightarrow x = \dfrac{2f^{-1}(x) + 3}{f^{-1}(x) + 1}$, isolando $f^{-1}(x)$

$$\Rightarrow x \cdot f^{-1}(x) + x = 2f^{-1}(x) + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-2}}, \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Logo $\boxed{D = \mathbb{R} - \{2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$

24.
Como os coeficientes são todos reais, então se a+bi (a, b $\in$ R) é raiz, a – bi também será.

Então as 11 raízes serão da seguinte forma:
(β - iγ_1 e β + iγ_1) serão raízes.
(β - iγ_2 e β + iγ_2) serão raízes.
.
.
(β - iγ_5 e β + iγ_5) serão raízes.

Como existe um número ímpar de raízes, então $\gamma_6 = 0$ e β também é raiz da equação (raiz real única).

I- Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$ (Verdadeiro)
Justificativa: Se $x = 0$ é raiz, então:

$$0 + \sum_{n=1}^{10} a_n.0 + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$$

II – Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$ (Verdadeiro).
Justificativa: Das relações de Girard temos que a soma das raízes é dada por $-a_{10}$, então:
$(\beta - i\gamma_1) + (\beta + i\gamma_1) + ... + (\beta - i\gamma_5) + (\beta + i\gamma_5) + \beta = =11\,\beta = -a_{10}$, e se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$.

III – Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$ (Falso).
Justificativa: O produto das raízes agrupadas 10 a 10 é igual a $- a_1$. Então se $\beta = 0$ temos:
$- a_1 = (\beta^2 + \gamma_1^2) \ldots (\beta^2 + \gamma_5^2) = (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots \gamma_5)^2$, como $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \neq 0$, então $a_1 \neq 0$.

25.

Pelo enunciado podemos assumir que:
A probabilidade do candidato obter nota suficiente para participar da segunda etapa é = 20% = 0,2
E a probabilidade de nota insuficiente = 80% = 0,8
Se no mínimo 4 deles dentre 6 conseguem a nota mínima, temos 3 possibilidades:

1ª 4 conseguem e 2 não = $C_{6,4}.\left(0,2\right)^4.\left(0,8\right)^2$

2ª 5 conseguem e 1 não = $C_{6,5}.\left(0,2\right)^5.\left(0,8\right)^1$

2ª Os 6 conseguem = $C_{6,6}.\left(0,2\right)^6$

Sendo assim, a probabilidade de termos no mínimo 4 aprovados entre os 6 escolhidos é:

$$= \frac{6.5}{2}\cdot\frac{1}{5^4}\cdot\frac{4^2}{5^2} + 6\cdot\frac{1}{5^5}\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot\frac{1}{5^6} =$$

$$= \frac{240+24+1}{15625} = \boxed{\frac{53}{3125} = 0,01696 \simeq 1,7\%}$$

26.

a) Considere as matrizes $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ e $X \in M_{3x1}(\mathbb{R})$:
Se AX é a matriz coluna nula:

$$A.X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desse modo, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0 \end{cases}$$

Temos 12 incógnitas e 3 equações lineares.
Como o sistema é homogêneo, e tem solução para qualquer valor X, então é possível e indeterminado.
A matriz A é fixa e o resultado acima é válido para qualquer matriz X que seja escolhida. Para que sejam evitadas as contas, escolhemos como possíveis valores de X as matrizes $\begin{pmatrix} 63 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 75 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 84 \end{pmatrix}$, perceba que os números da matriz X poderiam ser quaisquer 3 números reais:

1) X = $\begin{pmatrix} 63 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 63.a_{11} + a_{12}.0 + a_{13}.0 = 0 \\ 63.a_{21} + a_{22}.0 + a_{23}.0 = 0 \\ 63.a_{31} + a_{32}.0 + a_{33}.0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{21} = 0 \\ a_{31} = 0 \end{cases}$

2) X = $\begin{pmatrix} 0 \\ 75 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}.0 + 75.a_{12} + a_{13}.0 = 0 \\ a_{21}.0 + 75.a_{22} + a_{23}.0 = 0 \\ a_{31}.0 + 75.a_{32} + a_{33}.0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{32} = 0 \end{cases}$

3) X= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 84 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}.0 + a_{12}.0 + 84.a_{13} = 0 \\ a_{21}.0 + a_{22}.0 + 84.a_{23} = 0 \\ a_{31}.0 + a_{32}.0 + 84.a_{33} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{33} = 0 \end{cases}$

Desse modo, temos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Pelo enunciado temos que A e B são matrizes não-nulas com $A.B = 0$.
Por absurdo, vamos supor que $\det A \neq 0$. Nesse caso, a matriz A é inversível, e podemos multiplicar pela direita ambos os membros da equação $A.B = 0$ pela matriz inversa de A. Assim:

$$A.B = 0 \Rightarrow A^{-1}.A.B = A^{-1}.0 \Leftrightarrow B = 0$$

Como $B \neq 0$ temos um absurdo, de modo que $\boxed{\det A = 0}$.
Aplicando o mesmo raciocínio para a matriz B, encontramos que $\boxed{\det B = 0}$.

27.

Separemos a solução da equação na variável $tg\left(x + \pi/6\right)$ em duas partes:

1) $tg\left(x + \pi/6\right) = -\sqrt{2}/2$;e 2) $tg\left(x + \pi/6\right) = \sqrt{2}/2$

Desenvolvendo a equação da primeira parte utilizando a igualdade $tg\left(x + \pi/6\right) = \dfrac{tgx + tg\,\pi/6}{1 - tgx \cdot tg\,\pi/6}$ e lembrando que

$tg\,\pi/6 = \sqrt{3}/3$ obtemos: $tgx = \dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6 + \sqrt{6}}$ *(i)*

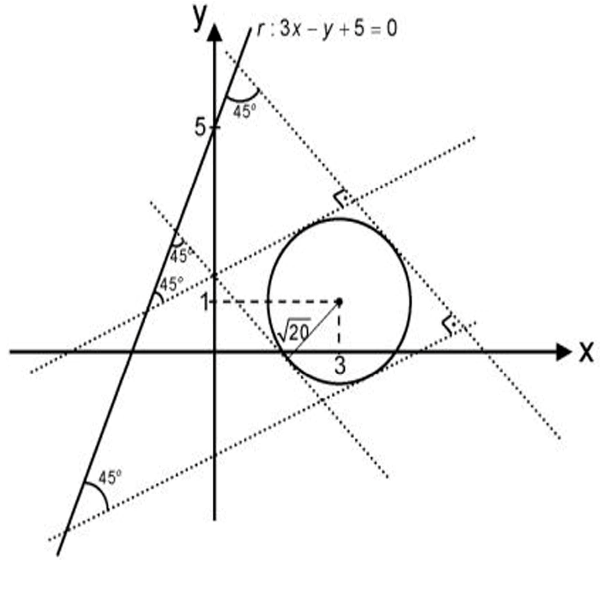
Como x é um ângulo do primeiro quadrante, podemos construir um triângulo retângulo auxiliar cujos catetos são o numerador e o denominador da expressão *(i)*, obtendo para a hipotenusa o valor $6\sqrt{2}$, e assim:

$$senx = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{6}}{6} \quad (ii)$$

Desenvolvendo a equação da segunda parte, de modo análogo, obtemos $tgx = \dfrac{-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6 - \sqrt{6}} < 0$, o que é impossível para um ângulo do primeiro quadrante.

Desta forma $\boxed{senx = \dfrac{3 - \sqrt{6}}{6}}$

28.



t : y = mx + q → mx − y + q = 0

r : 3x − y + 5 = 0 → y = 3x + 5

Como o ângulo agudo formado pelas retas r e s é 45º, segue:

$$tg45^\circ=\left|\frac{m_r-m_t}{1+m_r.m_t}\right| \Leftrightarrow 1=\left|\frac{3-m}{1+3.m}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{3-m}{3m+1}=1 \; ou \; \frac{3-m}{3m+1}=-1$$

Então: $\boxed{m=\frac{1}{2}}$ ou $\boxed{m=-2}$

Para m = -2 a reta t será y = -2x + q → 2x + y − q =0 (i)

Como a distância da origem à reta t é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, temos:

de (I): $d_{0,t} = \frac{|2.0+0-q|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\rightarrow$

$$\frac{|-q|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\rightarrow \boxed{q=\pm 3} \text{ (I)}$$

Para m = $\frac{1}{2}$ a reta t será y = $\frac{1}{2}x$ + q → x − 2y + 2q = 0

$$d_{0,t} = \frac{|0-2.0+2q|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}\rightarrow$$

$$\frac{|2q|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\rightarrow |2q|=3\rightarrow \boxed{q=\pm\frac{3}{2}} \text{ (II)}$$

A reta determinada por m e q deve ter distancia até o centro (3,1) = Raio = $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Usando os valores de m e seu q obtemos 4 possibilidades de retas, a saber:

2x + y − 3 =0, e $d=\frac{|2.3+1.1-3|}{\sqrt{5}}=\frac{4.\sqrt{5}}{5}\neq 2.\sqrt{5}$

2x+y + 3 =0, e $d=\frac{|2.3+1.1+3|}{\sqrt{5}}=\frac{10.\sqrt{5}}{5}=2.\sqrt{5}$

x− 2y + 3 = 0, e $d=\frac{|1.3-2.1+3|}{\sqrt{5}}=\frac{4.\sqrt{5}}{5}\neq 2.\sqrt{5}$

x− 2y - 3 = 0, e $d=\frac{|1.3-2.1-3|}{\sqrt{5}}=\frac{2.\sqrt{5}}{5}\neq 2.\sqrt{5}$

Logo a única das 4 retas que satisfaz é
t: $\boxed{2x + y + 3 = 0}$
ou ainda $\boxed{y = -2x - 3}$

29.

Como r_5 tangencia a circunferência $x^2+y^2=25$, então a equação $x^2+(m_5x+10)^2=25$ (cujas soluções representam as abscissas da interseção entre a reta e a circunferência) tem discriminante nulo ($\Delta=0$).

Reescrevendo a equação, temos:

$(1+m_5^2)x^2+20m_5x+75=0$, e assim, para $\Delta=0$:

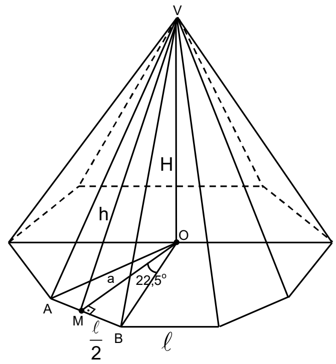
$$(20m_5)^2-4\cdot(1+m_5^2)\cdot 75=0 \;\Rightarrow\; m_5^2=3$$

Como $m_1=0$ e $q>0$, temos que $m_5>0 \Rightarrow m_5=\sqrt{3}$.

Além disso, $m_5=m_1+4q=4q$ $\boxed{\therefore q=\frac{\sqrt{3}}{4}}$

30.

Vamos usar a seguinte pirâmide octogonal regular como referência:



O volume solicitado é $V_{PIRÂMIDE}=\frac{1}{3}.A_B.H$, onde A_B é a área do octógono que forma a base da pirâmide e H a altura da pirâmide.

Por hipótese, $\frac{A_L}{A_B}=\sqrt{5}\Rightarrow A_L=\sqrt{5}A_B$ (I);

A área lateral é 8 vezes a área do triângulo que forma a face lateral. Assim, $A_L=8\cdot\frac{1}{2}.\ell.h=4.\ell.h$, onde ℓ é o lado do octógono da base e h é a altura desse triângulo.

A área da base é a área do octógono, que é 8 vezes a área do triângulo ABO, da figura.

Assim, $A_B=8.\frac{1}{2}.\ell.a=4a.\ell$ (II);

Portanto, $4\cdot\ell\cdot h=\sqrt{5}\cdot 4\cdot a\cdot\ell \Rightarrow h=\sqrt{5}\cdot a$ (III);

Usando Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$h^2 = H^2 + a^2 \Rightarrow H^2 = h^2 - a^2$. Substituindo (III) no resultado encontrado, vem:

$$H^2 = 4a^2 \Rightarrow H = 2a \text{ (IV)};$$

Para calcular a área da base, note que o ângulo $M\widehat{O}B$ é dado por:

$$M\widehat{O}B=\frac{360^\circ/8}{2}=22{,}5^\circ$$

No triângulo MOB, temos: tg22,5º = $\frac{\ell}{2a}$.

Sabendo que $tg\,45^\circ=\frac{2.tg22{,}5}{1-tg^2 22{,}5}=\frac{2.x}{1-x^2}=1$, temos que: $x^2+2.x-1=0,\ \Delta=4+4=8$

Como x >0, então tg22,5º = $\sqrt{2}-1$

Com isso, temos:

$$\ell=2a.(\sqrt{2}-1) \text{ (V)}.$$

Portanto:

$$V_{PIRÂMIDE}=\frac{1}{3}.A_B.H=\frac{1}{3}.4.a.2a.(\sqrt{2}-1)2a=\frac{16}{3}a^3(\sqrt{2}-1).$$

$$\boxed{V_{PIRÂMIDE}=\frac{16}{3}a^3\left(\sqrt{2}-1\right)}.$$

Cortesia:
Resoluções Alferes Vestibulares