PRINCIPAIS NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais

$\mathbb{Z}$ = conjunto dos números inteiros

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$

$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z};\ x > 0\}$

$\log_a(b)$ = logaritmo de b na base a

$\ell n\, b$ = logaritmo neperiano de b

$\det A$ = determinante da matriz A

$A^2 = A\,A$ (A = matriz quadrada)

I_n = matriz identidade de ordem n

$|z|$ = módulo do número complexo z

$i = \sqrt{-1}$ (unidade imaginária)

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$

$[a, b[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

$]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \le a\}$

$]-\infty, a[\ = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$

$[a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x\}$

$]a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$

(a, b) é o par ordenado

$\varnothing$ = conjunto vazio

1. Se **Q** e **I** representam, respectivamente, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in Q \\ 1, & \text{se } x \in I \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in Q \\ 0, & \text{se } x \in I \end{cases}$$

Seja **J** a imagem da função composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Podemos afirmar que

(A) $J = \mathbb{R}$ (B) $J = Q$ (C) $J = \{0\}$ (D) $J = \{1\}$ (E) $J = \{0, 1\}$

2. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ fixado. Considere o conjunto

$$A = \left\{ \frac{p}{q} :\ p, q \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ 0 < q < n \right\}$$

Definimos f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \left[\cos(n!\ \pi\ x)\right]^{2n}$.

Se f(A) denota a imagem do conjunto **A** pela função **f**, então

(A) $f(A) =]-1, 1[$

(B) $f(A) = [0, 1]$

(C) $f(A) = \{1\}$

(D) $f(A) = \{0\}$

(E) $f(A) = \{0, 1\}$

3. O domínio **D** da função

$$f(x) = \ell n\left[\frac{\sqrt{\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x}\right]$$

é o conjunto

(A) $D = \left\{x \in \mathbb{R}:\ 0 < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

(B) $D = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x < \frac{1}{\pi} \text{ ou } x > \pi\right\}$

(C) $D = \left\{x \in \mathbb{R}:\ 0 < x \le \frac{1}{\pi} \text{ ou } x \ge \pi\right\}$

(D) $D = \{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$

(E) $D = \left\{x \in \mathbb{R}:\ 0 < x < \frac{1}{\pi} \text{ ou } \pi < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

4. Considere os números complexos $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = 1 + i\sqrt{3}$.

Se $m = \left|\dfrac{(w^6 + 3z^4 + 4i)}{(z^2 + w^3 + 6 - 2i)}\right|^2$, então **m** vale

(A) 34 (B) 26 (C) 16 (D) 4 (E) 1

5. Seja $m \in \mathbb{R}_+^*$ tal que a reta $x - 3y - m = 0$ determina, na circunferência $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, uma corda de comprimento 6. O valor de **m** é

(A) $10 + 4\sqrt{10}$

(B) $2 + \sqrt{3}$

(C) $5 - \sqrt{2}$

(D) $6 + \sqrt{10}$

(E) 3

6. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{R}_+^*$ com $m \ge 10$ e $x \in \mathbb{R}_+^*$. Seja D o desenvolvimento do binômio $(a + b)^m$, ordenado segundo as potências crescentes de **b**. Quando $a = x^n$ e $b = x^{-n^2}$, o sexto termo de **D** fica independente de x. Quando $a = x$ e $b = x^{-\frac{1}{n}}$, o oitavo termo de **D** se trona independente de **x**. Então m é igual a

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ com $a^2 = b^2 + c^2$. Se x, y e z satisfazem o sistema

$$\begin{array}{l} c\cos y + b\cos z = a \\ c\cos x + a\cos z = b \\ b\cos x + a\cos y = c \end{array}$$

então $\cos x + \cos y + \cos z$ é igual a

(A) $\frac{(a-b)}{c}$

(B) $\frac{(a+b)}{c}$

(C) $\frac{(b+c)}{a}$

(D) $\frac{(c+a)}{b}$

(E) $\frac{(b^2+c^2)}{a}$

8. Sejam **A**, **B** e **C** matrizes reais, quadradas de ordem **n** e não nulas. Por **O** denotamos a matriz nula de orem **n**. Se AB = AC, considere as afirmações:

I. $A^2 \neq 0$
II. $B = C$
III. $\det B \neq 0$
IV. $\det(B - C) = 0$

(A) todas são falsas.

(B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(C) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

(D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

(E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

9. Seja θ um valor fixado no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sabe-se que $a_1 = \operatorname{cotg}\theta$ é o primeiro termo de uma progressão geométrica infinita de razão $q = \operatorname{sen}^2\theta$. A soma de todos os termos dessa progressão é

(A) $\operatorname{cosec}\theta \operatorname{tg}\theta$

(B) $\sec\theta \operatorname{tg}\theta$

(C) $\sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

(D) $\sec^2\theta$

(E) $\operatorname{cosec}^2\theta$

10. Seja **A** o ponto de intersecção das retas **r** e **s** dadas, respectivamente, pelas equações $x + y = 3$ e $x - y = -3$. Sejam **B** e **C** pontos situados no primeiro quadrante com **B** ∈ **r** e **C** ∈ **s**. Sabendo que $d(A,\ B) = d(A,\ C) = \sqrt{2}$, então a reta passando por **B e C** é dada pela equação

(A) $2x + 3y = 1$ (B) $y = 1$ (C) $y = 2$ (D) $x = 1$ (E) $x = 2$

11. Sejam $f,\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que

$g(x) = 1 - x$ e $f(x) + 2f(2 - x) = (x - 1)^3$,

para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f[g(x)] é igual a

(A) $(x - 1)^3$

(B) $(1 - x)^3$

(C) x^3

(D) x

(E) $2 - x$

12. Seja **S** o conjunto de todas as raízes da equação $2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = 0$. Sobre os elementos de **S** podemos afirmar que

(A) todos são números reais.

(B) 4 são números reais positivos.

(C) 4 não são números reais.

(D) 3 são números reais positivos e 2 não são reais.

(E) 3 são números reais negativos.

13. Sejam $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ polinômios na variável real **x** de graus n_1, n_2 e n_3, respectivamente, com $n_1 > n_2 > n_3$. Sabe-se que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $p_3(x)$. Seja $r(x)$ o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$. Considere as afirmações:

I. $r(x)$ é divisível por $p_3(x)$.

II. $p_1(x) - \frac{1}{2}\, p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$.

III. $p_1(x)\, r(x)$ é divisível por $[p_3(x)]^2$.

Então,

(A) apenas (I) e (II) são verdadeiras.

(B) apenas (II) é verdadeira.

(C) apenas (I) e (III) são verdadeiras.

(D) todas as afirmações são verdadeiras.

(E) todas as afirmações são falsas.

14. Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento AC mede 2 cm. Sejam α e β, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos BC e AC. A área do triângulo é (em cm^2) igual a

(A) $2\text{sen}^2\alpha\ \text{cotg}\,\beta + \text{sen}\,2\alpha$
(B) $2\ \text{sen}^2\alpha\ \text{tg}\,\beta - \text{sen}\,2\alpha$
(C) $2\cos^2\alpha\ \text{cotg}\,\beta + \text{sen}\,2\alpha$
(D) $2\cos^2\alpha\ \text{tg}\,\beta + \text{sen}\,2\alpha$
(E) $2\text{sen}^2\alpha\ \text{tg}\,\beta - \cos 2\alpha$

15. Considere, no plano complexo, um hexágono regular centrado em $z_0 = i$. Represente por $z_1, z_2, \ldots, z_6$, seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1 = 1$ então $2z_3$, é igual a

(A) $2 + 4i$
(B) $(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 3)\ i$
(C) $\sqrt{6} + (\sqrt{2} + 2)\ i$
(D) $(2\sqrt{3} - 1) + (2\sqrt{3} + 3)\ i$
(E) $\sqrt{2} + (\sqrt{6} + 2)\ i$

16. Seja **S** o conjunto dos números complexos que satisfazem, simultaneamente, às equações:

$|z - 3i| = 3$ e $|z + i| = |z - 2 - i|$.

O produto de todos os elementos de **S** é igual a

(A) $-2 + i\sqrt{3}$
(B) $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$
(C) $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$
(D) $-3 - 3i$
(E) $-2 + 2i$

17. Sejam a_1, a_2, a_3 e a_4 números reais formando, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente com $a_1 \neq 0$. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Se $x_1 = 2i$, então

(A) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$
(B) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
(C) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$
(D) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 8$
(E) $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 5$

18. Os números reais x, y e t formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão **r**. Seja **n** um número real com $n > 0$ e $n \neq 1$ satisfazendo $3n^x + 2n^y - n^t = 0$. Então **r** é igual a

(A) n^2

(B) $(1/2)^n$

(C) $\log_{2n} 4$

(D) $\log_n (3/2)$

(E) $\log_n 3$

19. A sequência (a_1, a_2, a_3, a_4) é uma progressão geométrica de razão $q \in \mathbb{R}^*$ com $q \neq 1$ e $a_1 \neq 0$. Com relação ao sistema

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y = c \\ a_3 x + a_4 y = d \end{cases}$$

podemos afirmar que

(A) é impossível para c, d ∈ [-1, 1].

(B) é possível e determinado somente se $c = d$.

(C) é indeterminado quaisquer que sejam $c,\ d \in \mathbb{R}$.

(D) é impossível quaisquer que sejam $c,\ d \in \mathbb{R}^*$.

(E) é indeterminado somente se $d = cq^2$.

20. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sejam λ_0, λ_1 e λ_2 as raízes da equação $\det(A - \lambda I_3) = 0$ com $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$.

Considere as afirmações

I. $B = A - \lambda_0 I_3$
II. $B = (A - \lambda_1 I_3)\ A$
III. $B = A(A - \lambda_2 I_3)$

Então

(A) todas as afirmações são falsas.

(B) todas as afirmações são verdadeiras.

(C) apenas (I) é falsa.

(D) apenas (II) é falsa.

(E) apenas (III) é verdadeira.

21. Seja **S** o conjunto de todas as soluções reais da equação

$$\sec\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+e^x} - \operatorname{arc\,tg}(1-e^x)\right] = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Então

(A) $S = \varnothing$

(B) $S = \mathbb{R}$

(C) $S \subset [1, 2]$

(D) $S \subset [-1, 1]$

(E) $S = [-1, 2[$

22. Dado um número real a com a > 1, seja **S** o conjunto solução da inequação

$$\log_{\frac{1}{a}} \log_a \left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} \leq \log_{\frac{1}{a}}(x-1).$$

Então **S** é o intervalo

(A) $[4, +\infty[$

(B) $[4, 7[$

(C) $]1, 5]$

(D) $]1, 4]$

(E) $[1, 4[$

23. Considere os pontos A:(0, 0), B:(2, 0) e C:(0, 3). Seja P:(x, y) o ponto de intersecção das bissetrizes internas do triângulo ABC. Então $x + y$ é igual a

(A) $\dfrac{12}{5+\sqrt{13}}$ (B) $\dfrac{8}{2+\sqrt{11}}$ (C) $\dfrac{10}{6+\sqrt{13}}$ (D) 5 (E) 2

24. A altura e o raio da base de um cone de revolução medem 1 cm e 5 cm respectivamente. Por um ponto do eixo do cone situado a **d** cm de distância do vértice, traçamos um plano paralelo à base, obtendo um tronco de cone. O volume deste tronco é a média geométrica entre os volumes do cone dado e do cone menor formado. Então **d** é igual a

(A) $\dfrac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}{3}$

(B) $\dfrac{\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}}{2}$

(C) $\dfrac{\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}}{2}$

(D) $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}$

(E) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{3}$

25. Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem **a** cm e **2a** cm. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em cm) do tronco mede

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

(B) $\frac{a\sqrt{35}}{10}$

(C) $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

(D) $\frac{a\sqrt{35}}{\sqrt{10}}$

(E) $\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

Gabarito

1.	C	**14.**	A
2.	C	**15.**	B
3.	E	**16.**	D
4.	A	**17.**	A
5.	A	**18.**	E
6.	B	**19.**	E
7.	C	**20.**	E
8.	S/R	**21.**	D
9.	C	**22.**	D
10.	D	**23.**	A
11.	C	**24.**	B
12.	D	**25.**	B
13.	D		