MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
CENTRO TÉCNICO AEROESPACIAL
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CADERNO DE QUESTÕES

MATEMÁTICA

VESTIBULAR DE 1983

EXAME DE MATEMÁTICA E DESENHO

INSTRUÇÕES

1. A prova de Matemática e Desenho contém 20 (vinte) questões, sendo as 15(quinze) primeiras de Matemática e as 5(cinco)úl timas de Desenho.
2. Duração da prova: 3(três) horas.
3. Todo candidato receberá duas folhas para rascunhar. Peça ou tras ao Fiscal caso necessite.
4. Para realizar a prova, o candidato poderá usar lápis, borra cha, régua milimetrada, esquadros, compasso e transferidor.
5. Não é permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, calcula dora ou escala triangular.
6. As respostas deverão ser acompanhadas de solução. Usar o CADERNO DE RESPOSTAS.
   Para as questões de Desenho só serão aceitas soluções *gráficas*.
7. Para cada questão assinale somente uma alternativa, pois mais de uma anula a questão.
8. Você não é obrigado a responder a todas as questões. O car tão não será rejeitado por este motivo.
9. Após uma classificação prévia pelo computador, os aprovados terão seus exames corrigidos manualmente, para a classifica ção final.
   Perfure corretamente o cartão do computador e, de modo, cla ro, resolva as questões no caderno de respostas, que *deverá ser devolvido ao fiscal.*

10. O aluno que retiver seu *caderno de respostas* estará automaticamente desclassificado.

Boa Sorte.

N O T A Ç Ã O

1. $\mathbb{R}$ denotará o conjunto dos números reais.
2. $\mathbb{Z}$ denotará o conjunto dos números inteiros.
3. z denotará um número complexo e $\bar{z}$ o seu conjugado.
4. i denotará a unidade imaginária ($i = \sqrt{-1}$)

1ª questão

Ao girarmos o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \in [0,1] \\ \sqrt{2x - x^2} & ; x \in (1,2] \end{cases}$$

em torno do eixo das abcissas (eixo dos x), obtemos uma superfície de revolução cujo volume é:

A) $\frac{\pi}{3}$

B) $\frac{\pi}{2}$

C) π

D) 2π

E) 3π

2ª questão

Um general possui n soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com r soldados e outro de retaguarda com s soldados $(r + s = n)$, ele poderá dispor seus homens de:

A) $\frac{n!}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.

B) $\frac{n!}{r!s!}$ maneiras distintas neste ataque.

C) $\frac{n!}{(rs)!}$ maneiras distintas neste ataque.

D) $\frac{2(n!)}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.

E) $\frac{2(n!)}{r!s!}$ maneiras distintas neste ataque.

3ª questão

Dadas as funções $f(x^2) = \log_{2x} x$ e $g(x) = 2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1$ definidas para $x > 0$ e $x \neq 1/2$, o conjunto

$$A = (x \in (0, 2\pi) : (g \circ f)(x) = 0)$$ é dado por:

A) $A = \left\{4^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 4^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

B) $A = \left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 2^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

C) $A = \left\{4^{2-\pi}, 4^{6-\pi}, 4^{6-5\pi}\right\}$

D) $A = \left\{4^{\frac{2\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{2\pi}{6-\pi}}, 4^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

E) $A = \left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

4ª questão

Considere os números reais não nulos a, b, c e d em progressão geométrica tais que a, b e c são raízes da equação (em x) $x^3 + Bx^2 - 2Bx + D = 0$, onde B e D são números reais e $B > 0$. Se $cd - ac = -2B$, então

A) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$ e $b^2 + c^2 + d^2 = \frac{16B^2}{B^2+4B}$

B) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{16B}{B^2+4}$

C) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)$ e $b^2+c^2 + d^2 = \frac{16B}{B+4}$

D) $(a^2+b^2+c^2)(b + c + d) = (ab+bc+cd)^2$ e $a^2+b^2 + c^2 = \frac{16B}{B+4}$

E) $(a^2+b^2+c^2)(b + c + d) = (ab+bc+cd)^2$ e $a^2+b^2 + c^2 = \frac{B+4}{16B}$

5ª questão

Dado o polinômio P definido por $P(x) = \operatorname{sen}\theta - (\operatorname{tg}\theta)\, x + (\sec^2\theta)x^2$, os valores de θ no intervalo $[0, 2\pi]$ tais que P admita somente raizes reais são:

A) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

B) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ou $\pi < \theta < 3\frac{\pi}{2}$

C) $\pi \leq \theta < 3\frac{\pi}{2}$ ou $3\frac{\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$

D) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

E) $\frac{\pi}{2} \leq \theta < 3\frac{\pi}{2}$

6ª questão

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ onde $a = 2^{(1+\log_2 5)}$; $b = 2^{\log_2 8}$;

$c = \log_{\sqrt{3}} 81$ e $d = \log_{\sqrt{3}} 27$.

Uma matriz real quadrada B, de ordem 2, tal que AB é a matriz identidade de ordem 2 é:

A) $\begin{bmatrix} \log_{\sqrt{3}} 27 & 2 \\ 2 & \log_{\sqrt{3}} 81 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \log_2 5 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} \log_2 5 & 3\log_{\sqrt{3}} 81 \\ 5 & -2^{\log_2 81} \end{bmatrix}$

7ª questão

Sejam três funções f, u, $v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$ para todo x não nulo e $(u(x))^2 + (v(x))^2 = 1$

para todo x real.

Sabendo-se que x_0 é um número real tal que $u(x_0) . v(x_0) \neq 0$

e $f\left(\frac{1}{u(x_0)} . \frac{1}{v(x_0)}\right) = 2$, o valor de $f\left(\frac{u(x_0)}{v(x_0)}\right)$ é:

A) -1

B) 1

C) 2

D) $\frac{1}{2}$

E) -2

8ª questão

A solução da equação:

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto dos reais diferentes de -1 é:

A) 1

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{2}$ e 1

D) 2

E) 2 e 1

9ª questão

Dados A, B e C ângulos internos de um triângulo, tais que $2B + C \neq \pi$ e $\alpha \in (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$, o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - C}{2}\right) \\ -\cos A + \cos B = \cos\left(\frac{\alpha - C}{2}\right) \end{cases}$$

admite como solução:

A) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\pi$ e $C = \frac{2}{3}\pi$

B) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = 0$

C) $A = \frac{2\pi}{3}$, $B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}$

D) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{2}{3}\pi$ e $C = \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\pi$

E) $A = \pi$, $B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = -\frac{\alpha}{2}$

10ª questão

Determine o polinômio P de 3º grau que apresenta uma raiz nula e satisfaz a condição $P(x-1) = P(x) + (2x)^2$ para todo x real. Com o auxílio deste, podemos calcular a soma $2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2$, onde n é um número natural, que é igual a:

A) $\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 - \frac{2}{3}n$

B) $\frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n$

C) $\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + \frac{2}{3}n$

D) $4n^3 + 2n^2 + n$

E) $n^3 + n^2 + 2n$

11ª questão

Seja a um número real tal que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in Z$.
Se (x_0, y_0) é solução do sistema

$$(2\sec a)\, x + (3\mathrm{tg}\, a) y = 2\cos a$$
$$(2\mathrm{tg}\, a)\, x + (3\sec a)\, y = 0$$

então podemos afirmar que:

A) $x_0 + y_0 = 3 - 2\mathrm{sen}\, a$

B) $(\frac{2}{3} x_0)^2 - y_0^2 = \frac{4}{9} \cos^2 a + 2$

C) $x_0 - y_0 = 0$

D) $x_0 + y_0 = 0$

E) $(\frac{2}{3} x_0)^2 - y_0^2 = \frac{4}{9} \cos^2 a$

12ª questão

Consideremos uma pirâmide regular cuja base quadrada tem área que mede $64\ cm^2$. Numa seção paralela à base que dista 30mm desta, inscreve-se um círculo. Se a área deste círculo mede $4\pi cm^2$, então a altura desta pirâmide mede:

A) 1 cm

B) 2 cm

C) 4 cm

D) 6 cm

E) 60 cm

13ª. questão

Sejam m e n constantes reais estritamente positivas. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, consideramos "C" a circunferência de centro $P(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ e de raio $R = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$ e "r" a reta de equação $mx+ny+(\sqrt{m^2+n^2} - 2) = 0$.

Nestas condições, se "s" é a reta que passa por P e é perpendicular à reta "r", então os pontos de interseção de "s" com "C" são

A) $(\frac{1}{m} + 1, \frac{1}{n})$ e $(\frac{1}{m} - 1, \frac{1}{n} - \frac{n}{m})$

B) $(\frac{1}{m} + 1, \frac{n}{m})$ e $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$

C) $(\frac{1}{m}, \frac{n}{m})$ e $(\frac{1}{m}, -\frac{m}{n})$

D) $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} + 1)$ e $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} + \frac{n}{m})$

E) $(\frac{1}{m} + 1, \frac{1}{n} + \frac{n}{m})$ e $(\frac{1}{m} - 1, \frac{1}{n} - \frac{n}{m})$

14ª. questão

As equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + nbx + 12 = 0$, onde a e b são constantes reais e n um inteiro, têm duas raízes comuns. Das afirmativas abaixo, qual é a verdadeira?

A) As raízes não comuns às equações têm sinais opostos.

B) As raízes não comuns às equações são negativas quando a é negativo.

C) A soma das raízes não comuns às equações é 5.

D) b e n possuem o mesmo sinal.

E) As raízes comuns às equações dependem de n.

15ª questão

Consideremos um número complexo z tal que $\frac{z^2}{\bar{z}i}$ tem argumento igual a $\frac{\pi}{4}$ e $\log_2(z + \bar{z} + 2) = 3$.

Nestas condições, podemos afirmar que:

A) Não existe $\ln\left(\frac{z - \bar{z}}{i}\right)$

B) $z^4 + \ln\left(\frac{z - \bar{z}}{i}\right) = -324$

C) $z + 2\bar{z}$ é um número real

D) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{108}(1 + i)$

E) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = -\frac{1}{108}(1 + i)$

16ª questão

As retas (r'), (s') e (t') são figuras afins das retas (r), (s) e (t). Determinar o raio da circunferência tangente às retas (r), (s) e (t), sabendo-se que os pontos (A) e (A') são pontos afins e (x) é o eixo de afinidade.

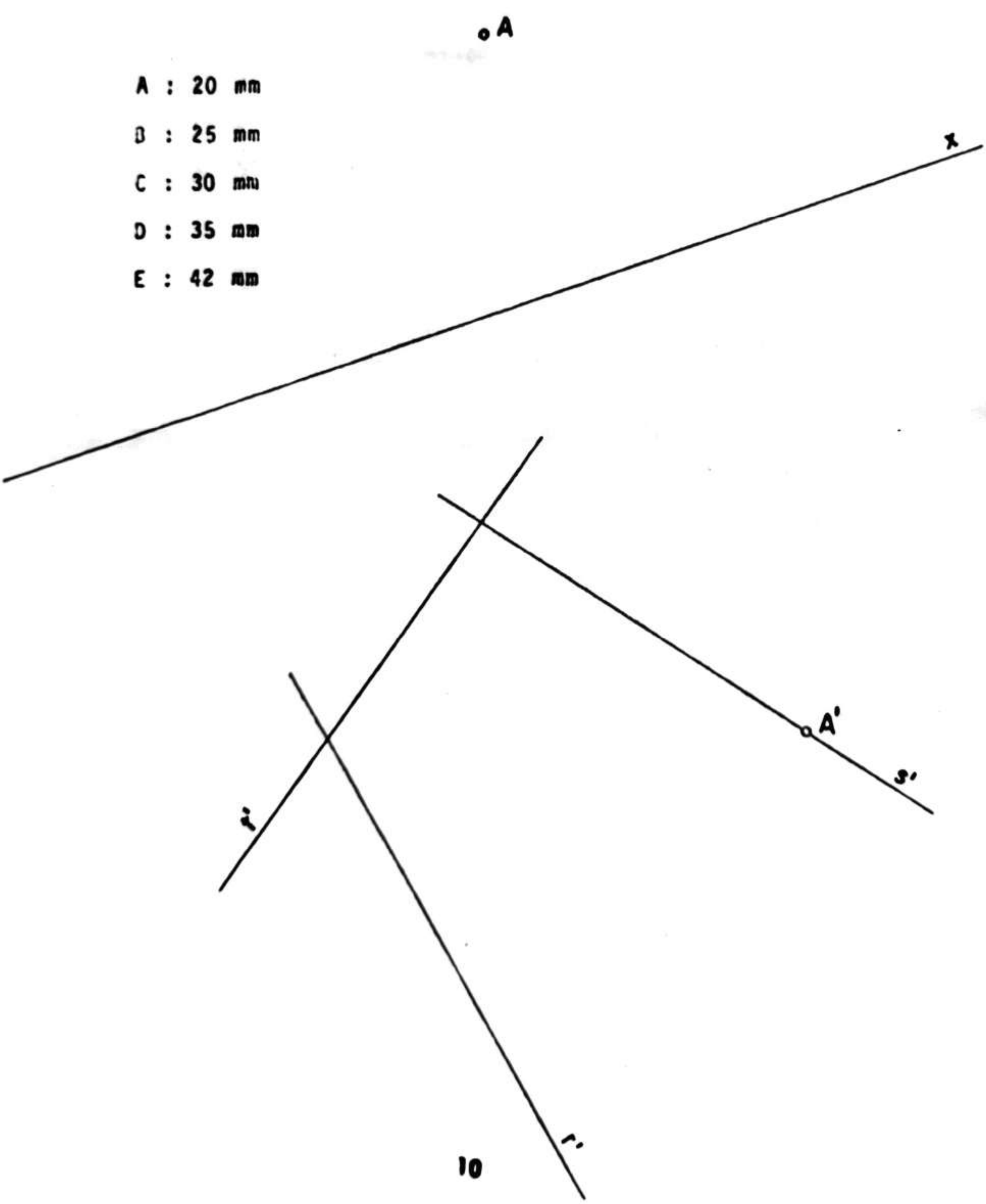
A : 20 mm

B : 25 mm

C : 30 mm

D : 35 mm

E : 42 mm



17ª questão

Determinar o comprimento aproximado do lado oposto ao vértice (A) de um triângulo qualquer, sendo dados os lados (l_1) e (l_2) que definem o vértice (A). É conhecido também o comprimento da bissetriz (b_A), de origem em (A).

$l_1 = 50mm$ $l_2 = 33mm$ $b_A = 22mm$

A : 55 mm

B : 70 mm

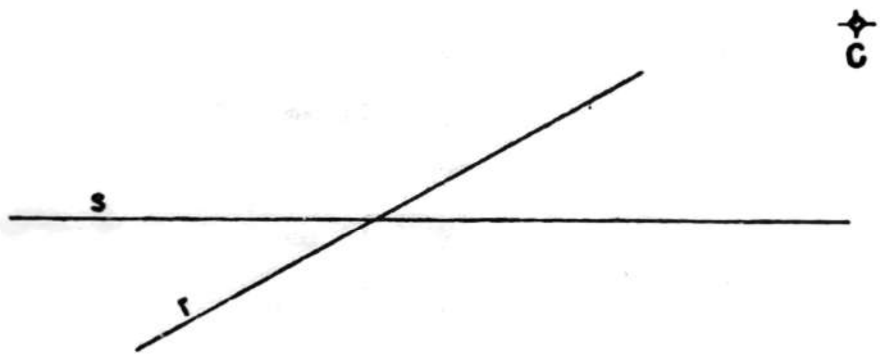
C : 60 mm

D : 45 mm

E : 78 mm

18ª questão

São dadas as retas (r) e (s) e um ponto (C). Construir um hexágono regular, tal que tenha o ponto (C) como centro da circunferência circunscrita e dois vértices opostos do hexágono estão um sobre a reta (r) e outro sobre a reta (s). Determinar graficamente o lado do quadrado de área equivalente à do hexágono.



A : 60 mm

B : 45 mm

C : 35 mm

D : 40 mm

E : 50 mm

19ª questão

Determinar graficamente a altura do trapézio (ABCD), conhecendo-se:

Base $\overline{AB} = 92mm$ Base $\overline{CD} = 55mm$

A diagonal $\overline{BD}$ é média proporcional dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

O ponto (E) é o ponto de concurso das retas suportes dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ e o ângulo AEB=30^0.

Identificação dos pontos (A)(B)(C)(D) no sentido anti-horário.

A : 21 mm

B : 26 mm

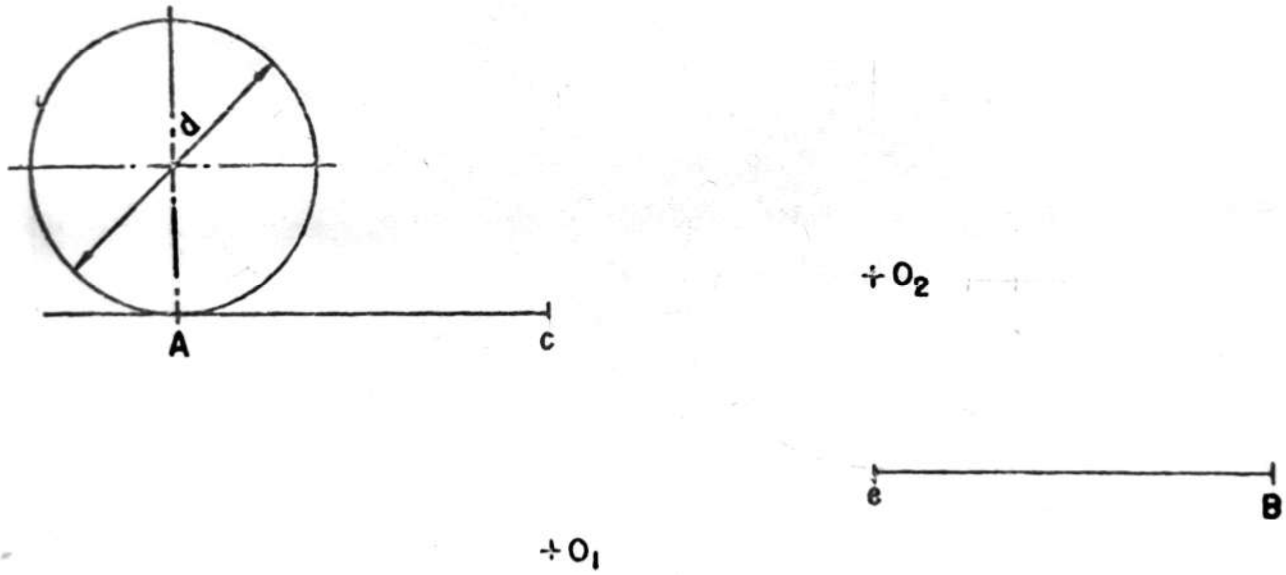
C : 35 mm

D : 56 mm

E : 46 mm

20ª questão

Uma roda de diâmetro (d) está em repouso, apoiada sobre a semi-reta de origem (c), no ponto (A). Em dado instante é posta em movimento, girando, sem deslizar, até atingir o ponto (B), onde para. Sabendo-se que os pontos (c) e (e) são ligados por dois arcos de circunferência, de centros (O_1) e (O_2) e considerando que a roda, para completar o trajeto, deu duas voltas completas, determinar o valor aproximado de seu diâmetro. A solução terá que ser inteiramente gráfica.



A : 30 mm

B : 15 mm

C : 20 mm

D : 35 mm

E : 40 mm