ÁLGEBRA, ANÁLISE e GEOMETRIA ANALÍTICA

1º ANO CFG. 90/91

1ª Questão: Valor: 1,0

Determine todas as matrizes X, reais, de dimensões 2 x 2, tais que AX = XA, para toda matriz A real 2 x 2.

2ª Questão: Valor: 1,0

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 102\}$, pede-se o número de sub-conjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

3ª Questão: Valor: 1,0

A coleção de selos de Roberto está dividida em três volumes. Dois décimos do total de selos estão no primeiro volume, alguns sétimos do total estão no segundo volume e 303 selos estão no terceiro volume. Quantos selos Roberto tem?

4ª Questão: Valor: 1,0

Mostre que o número

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$$

é racional.

5ª Questão: Valor: 1,0

a) Sendo dada a equação $x^3 + px + q = 0$, $p,q \in \mathbb{R}$, que relação deverá existir entre p e q para que uma das raízes seja igual ao produto das outras duas?

b) Mostre que a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$, satisfaz a relação encontrada e, em seguida, encontre as suas raízes.

6ª Questão: Valor: 1,0

Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ e $F: D \to \mathbb{R}^2$ uma função tal que $\forall (x,y) \in D$ associa $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ onde $\begin{cases} X = y \\ Y = (1 - y)x \end{cases}$

a) sendo $T = \{(X,Y) \mid X > 0,\ Y > 0,\ X + Y < 1\}$ mostre que F é uma bijeção de D sobre T;

b) esboce a imagem dos conjuntos da forma $\{(x,y) \in D \mid y = \lambda x\}$ para os seguintes valores de λ: $\lambda_0 = \frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$

7ª Questão: Valor: 1,0

Mostre que $$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen} \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

8ª Questão: Valor: 1,0

Dada a função racional:

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$$ e sabendo que $a,b,c,m,n,p \in \mathbb{Z}$ e que:

1º) $f(2) = 0$

2º) Para $x = -1$ tem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

3º) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -6$

4º) $x = 1$ é raiz do polinômio $mx^2 + nx + p$

5º) $f(3) = \frac{1}{f(4)}$

Determine os coeficientes a,b,c,m,n,p.

1º ANO C.F.G. 90/91

2

9ª Questão: ÁLG., AN., G. ANALÍTICA — Valor: 1,0

Seja o quadrado OABC cujos vértices são a origem e os pontos $A(1,1)$; $B(0,2)$; $C(-1,1)$. Seja $F(0,1)$ o centro desse quadrado e (P) a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abcissas. Pede-se:

1) Mostre que (P) passa por A e C.
2) Determine a equação dessa parábola.
3) Calcule as coordenadas do ponto D, segundo ponto de interseção da reta BC com (P).
4) Seja M um ponto qualquer de (P) cuja abcissa é x. Mostre que a potência de M em relação ao círculo (Γ) de diâmetro $\overline{CD}$ é $\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3)$.
5) A partir do resultado anterior, encontre o conjunto dos pontos de (P) interiores a (Γ).

10ª Questão: — Valor: 1,0

a) A partir do estudo da variação do sinal das funções $f(x) = \ln(1+x) - x$ e $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ deduza a relação $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $\forall x \in (0, +\infty)$

b) Sendo $n \in \mathbb{Z}^+$, seja

$$P(n) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)$$

Mostre que se $n \to \infty$, $P(n)$ admite um limite e calcule esse limite.

GEOMETRIA e TRIGONOMETRIA

1ª Questão: — Valor: 1,0

Sejam um círculo, com centro O e raio R, e um ponto P tal que $\overline{OP} = 3R$

a) Determine um diâmetro $\overline{MN}$ de modo que o triângulo PMN seja retângulo com ângulo reto em M.
b) Calcule em função de R, os lados e a área do triângulo PMN.
c) PN intercepta a circunferência em um segundo ponto K. Calcule $\overline{PK}$.
d) O diâmetro $\overline{MN}$ gira em torno de O. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P sobre MN?
e) Determine a posição do diâmetro $\overline{MN}$ para que a área do triângulo PMN seja máxima.

2ª Questão: — Valor: 1,0

Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num plano. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes ao círculo dado (exteriormente) e à reta dada.

3ª Questão: — Valor: 1,0

Sejam dois quadrados ABCD e ABEF, tendo um lado comum AB, mas não situados num mesmo plano. Sejam M e N pertencentes, respectivamente, às diagonais AC e BF tais que $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Mostre que MN é paralelo a DE.

4ª Questão: — Valor: 1,0

Q : Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo. Mostre que

$$\text{Sen } 2A + \text{sen } 2B + \text{sen } 2C = 4 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C.$$