INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

PROVA DE ÁLGEBRA, ANÁLISE e GEOMETRIA ANALÍTICA

CADERNO DE QUESTÕES

Concurso de Admissão
ao
Primeiro Ano
do
Curso de Formação e Graduação

1990 - 1991

COMISSÃO DE EXAME DE ESCOLARIDADE

1990/91

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA DE ÁLGEBRA, ANÁLISE e GEOMETRIA ANALÍTICA

1. Não assine ou faça qualquer sinal em sua prova que possa identificá-la. A inobservância disto poderá anulá-la.

2. Utilize caneta azul para resolução das questões. As figuras julgadas necessárias deverão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores.

3. A interpretação faz parte das questões; por conseguinte são vedadas perguntas ao Grupo de Aplicação e Fiscalização.

4. O espaço destinado à solução de cada questão é suficiente, não sendo considerada resolução fora do local especificamente designado.

5. Você recebeu 2(dois) Cadernos : o de Questões e o de Soluções.

6. Neste Caderno constam as 10(dez) questões que constituem a Prova, cada uma no valor de 1,0(um) ponto.

7. O de Soluções é constituido por 27(vinte e sete) páginas, das quais 20(vinte) destinam-se às resoluções e 7(sete) aos rascunhos. Observe que o rascunho não será levado em conta para efeito de correção.

8. O tempo total para execução da prova é limitado a 4 (quatro) horas.

9. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Observe o local correto para a resolução de cada questão. Escreva com caligrafia legível.

10. Não é permitido destacar qualquer das folhas que compõem os cadernos.

11. Ao entregar a prova devolva todo o material recebido. O Caderno de Questões estará liberado após o término da Prova.

12. Lembre-se : Não deixe questão alguma em branco. Se porventura não conseguir resolver integralmente uma questão, procure mostrar conhecimento sobre o assunto, deixando indicado o encaminhamento da solução. Com isto você certamente obterá uma fração do grau atribuido à questão.

Estamos aguardando-o como nosso aluno no inicio do período letivo e lhe desejamos FELICIDADE nesta prova.

1ª Questão: Valor: 1,0

Determine todas as matrizes X, reais, de dimensões 2 x 2, tais que $AX = XA$, para toda matriz A real 2 x 2.

2ª Questão: Valor: 1,0

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 102\}$, pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

3ª Questão: Valor: 1,0

A coleção de selos de Roberto está dividida em três volumes. Dois décimos do total de selos estão no primeiro volume, alguns sétimos do total estão no segundo volume e 303 selos estão no terceiro volume. Quantos selos Roberto tem?

4ª Questão: Valor: 1,0

Mostre que o número

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$$

é racional.

5ª Questão: Valor: 1,0

a) Sendo dada a equação $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, que relação deverá existir entre p e q para que uma das raízes seja igual ao produto das outras duas?

b) Mostre que a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$, satisfaz a relação encontrada e, em seguida, encontre as suas raízes.

6ª Questão: Valor: 1,0

Seja $D = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ e $F: D \to R^2$ uma função tal que $\forall (x,y) \in D$ associa $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ onde $\begin{cases} X = y \\ Y = (1-y)x \end{cases}$

a) sendo $T = \{(X,Y) \mid X > 0 , Y > 0 , X + Y < 1\}$ mostre que F é uma bijeção de D sobre T;

b) esboce a imagem dos conjuntos da forma $\{(x,y) \in D \mid y = \lambda x\}$ para os seguintes valores de λ: $\lambda_o = \frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$

7ª Questão: Valor: 1,0

Mostre que $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$

8ª Questão: Valor: 1,0

Dada a função racional:

$f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ e sabendo que $a,b,c,m,n,p \in \mathbb{Z}$ e que:

1º) $f(2) = 0$

2º) Para $x = -1$ tem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

3º) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -6$

4º) $x = 1$ é raiz do polinômio $mx^2 + nx + p$

5º) $f(3) = \dfrac{1}{f(4)}$

Determine os coeficientes a,b,c,m,n,p.

9ª Questão: Valor: 1,0

Seja o quadrado OABC cujos vértices são a origem e os pontos A(1,1); B(0,2); C(−1,1). Seja F(0,1) o centro desse quadrado e (P) a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abcissas. Pede-se:

1) Mostre que (P) passa por A e C.

2) Determine a equação dessa parábola.

3) Calcule as coordenadas do ponto D, segundo ponto de interseção da reta BC com (P).

4) Seja M um ponto qualquer de (P) cuja abcissa é x. Mostre que a potência de M em relação ao círculo (Γ) de diâmetro $\overline{CD}$ é $\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3)$.

5) A partir do resultado anterior, encontre o conjunto dos pontos de (P) interiores a (Γ).

10ª Questão: Valor: 1,0

a) A partir do estudo da variação do sinal das funções $f(x) = \ell n\,(1+x) - x$ e $g(x) = \ell n\,(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ deduza a relação $x - \frac{x^2}{2} < \ell n\,(1+x) < x$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$

b) Sendo $n \in \mathbb{Z}^+$, seja

$$P(n) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)$$

Mostre que se $n \to \infty$, P(n) admite um limite e calcule esse limite.

IME

60º

ANIVERSÁRIO

① Seja $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $X=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

Se $AX=XA \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix} \Rightarrow$ de a_{11} e a_{22}, $cf=bg$

se $b=0$ e $c\neq 0 \rightarrow f=0$ $\therefore$ se $b\neq 0$ e $c=0 \rightarrow g=0$

$\begin{pmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae & be \\ ch & dh \end{pmatrix} \Rightarrow$ de a_{12}, se $b\neq 0 \rightarrow e=h$

de a_{21}, se $c\neq 0 \rightarrow e=h$

$X=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \rightarrow X=\lambda I_2$, onde $\lambda \in \mathbb{Z}$ e I_2 é a matriz identidade 2×2 //

---

② A tem 102 elementos

$\rightarrow$ 34 são da forma $3k$ $(3, 6, 9, \ldots, 102)$

$\rightarrow$ 34 são da forma $3k-1$ $(2, 5, 8, \ldots, 101)$

$\rightarrow$ 34 são da forma $3k+1$ $(1, 4, 7, \ldots, 100)$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 34 \\ \hline 136 \\ 102\ \\ \hline 1156 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 33 \\ \times\ 16 \\ \hline 198 \\ 33\ \\ \hline 528 \end{array}$$

Para que a soma seja $3k'$:

$\rightarrow$ 3 do tipo $3k \rightarrow C_{34,3}$

$\rightarrow$ 3 do tipo $3k-1 \rightarrow C_{34,3}$

$\rightarrow$ 3 do tipo $3k+1 \rightarrow C_{34,3}$

$\rightarrow$ 1 de cada tipo $\rightarrow 34^3$

$\left.\right\} 3\cdot C_{34,3}+34^3$

$$\begin{array}{r} 1156 \\ +\ 528 \\ \hline 1684 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1684 \\ \times\ 34 \\ \hline 6736 \\ 5052\ \\ \hline 57256 \end{array}$$

$3\cdot \frac{34\cdot 33\cdot 32}{3\cdot 2}+34\cdot 34\cdot 34 = 34(33\cdot 16+34\cdot 34)$

57256 //

(3) $\frac{2}{10}x + \frac{mx}{7} + 303 = x \rightarrow \frac{mx}{7} + 303 = \frac{4x}{5}$

$x = 35k \rightarrow 5mk + 303 = 28k \rightarrow k = \frac{303}{28-5m}$

$303 = 3 \cdot 101 \rightarrow 28 - 5m = 3 \rightarrow m = 5 \rightarrow k = \frac{303}{3} = 101$

↑ primo

$x = 35 \cdot 101 = 35(100+1) = 3500 + 35 = 3535$ //

---

(4) Sejam $a = \sqrt{9 + \frac{125}{27}}$ e $b = 3 \rightarrow x = \sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b}$

$x^3 = a + b - 3\sqrt[3]{(a+b)^2(a-b)} + 3\sqrt[3]{(a+b)(a-b)^2} - (a-b) =$

$= 2b - 3\left(\sqrt[3]{(a^2-b^2)(a+b)} - \sqrt[3]{(a^2-b^2)(a-b)}\right) =$

$= 2b - 3\sqrt[3]{a^2-b^2}\left(\sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b}\right) = 2b - 3\sqrt[3]{a^2-b^2} \cdot x$

Mas $2b = 6$ e $a^2 - b^2 = 9 + \frac{125}{27} - 9 = \frac{125}{27}$

$x^3 = 6 - 3\sqrt[3]{\frac{125}{27}}\,x \rightarrow x^3 = 6 - 3 \cdot \frac{5}{3}x \rightarrow x^3 + 5x - 6 = 0$

$x = 1$ é raiz $\rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 5x - 6 & x - 1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 + x + 6 \\ \hline x^2 + 5x - 6 & \\ -x^2 + x & \\ \hline 6x - 6 & \\ -6x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2}$

complexo $\rightarrow$ não pode ser, porque $x \in \mathbb{R}$ $(a > b)$

Logo, $x = 1 \rightarrow x$ é racional //

(5) a) Sejam a, b e c as raízes $\to a = bc$

$a+b+c=0 \to b+c=-a$

$ab+ac+bc=p \to a(b+c)+bc=p \to -a^2+a=p$

$abc=-q \to a^2=-q \to a=\pm\sqrt{-q}$

$q\pm\sqrt{-q}=p \to -q=(p-q)^2$ //

b) $p=-6$ e $q=-4 \to +4=(-6-(-4))^2=(-6+4)^2=(-2)^2$

ok //

$a=\pm\sqrt{-q}=\pm\sqrt{-(-4)}=\pm 2$

se $a=2 \to p=-a^2+a=-4+2=-2 \to$ NÃO

se $a=-2 \to p=-4-2=-6$ ok $\to b+c=-a=2$

$bc=a=-2$

$x^2-2x-2=0 \to x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4(1)(-2)}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{12}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

raízes $= -2,\ 1+\sqrt{3}$ e $1-\sqrt{3}$ //

6 a) Supondo $F(x_1,y_1)=F(x_2,y_2) \to (y_1,(1-y_1)x_1)=(y_2,(1-y_2)x_2)$

$y_1=y_2 \neq 1$ (porque é <1) $\to 1-y_1=1-y_2 \neq 0$

$(1-y_1)x_1=(1-y_2)x_2 \to x_1=x_2 \to (x_1,y_1)=(x_2,y_2) \to$ F é INJETORA

injetora → um ponto da imagem só pode corresponder a um ponto do domínio

$F(x,y)=(X,Y)=(y,(1-y)x)$

$y<1 \to 1-y>0 \to$ como $x>0 \to Y=(1-y)x>0$

$X=y>0 \to$ como $X>0$ e $Y>0 \to X+Y>0$

$1-(X+Y)=1-(y+(1-y)x)=1-y-(1-y)x=\underbrace{\underbrace{(1-y)}_{>0}\underbrace{(1-x)}_{>0}}_{\text{porque } x<1 \text{ e } y<1}>0 \to X+Y<1$

$F(x,y)=(X,Y)\in T \to \operatorname{Im} F \subset T$

Seja $(X,Y)\in T \to X>0$ e $Y>0 \to X<X+Y<1 \to 0<X<1 \to 0<y<1$

Seja $x=\dfrac{Y}{1-y}=\dfrac{Y}{1-X}>0 \to$ como $X+Y<1 \to Y<1-X \to \dfrac{Y}{1-X}<1$

Logo, $0<\dfrac{Y}{1-X}<1 \to 0<x<1$

Como $0<x<1$ e $0<y<1 \to (x,y)\in D$

$F(x,y)=(y,(1-y)x)=\left(X,(1-X)\dfrac{Y}{1-X}\right)=(X,Y) \to \operatorname{Im} F = T$

↓

F é SOBREJETORA

Como F é INJETORA e SOBREJETORA → é BIJETORA //

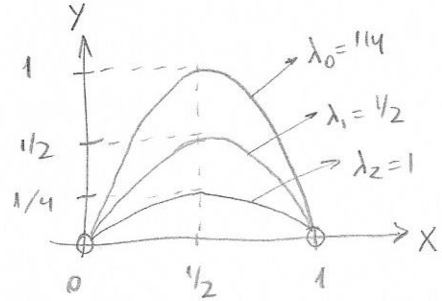
b) $F(x,\lambda x) = (\lambda x, (1-\lambda x)x) = (X,Y) \to X = \lambda x$

$Y = (1-\lambda x)x$

$x = \dfrac{X}{\lambda} \to Y = \left(1 - \dfrac{\lambda X}{\lambda}\right)\dfrac{X}{\lambda} = \dfrac{(1-X)X}{\lambda} = \dfrac{X - X^2}{\lambda} \to$ parábola de cabeça para baixo com raízes 0 e 1

ponto de máximo $\to 1 - 2X_{máx} = 0 \to X_{máx} = 1/2$

$Y_{máx} = \dfrac{1/2 - 1/4}{\lambda} = \dfrac{1}{4\lambda} \to Y_{máx} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\cdot\frac{1}{4}} = 1, \text{ para } \lambda_0 = 1/4 \\ \dfrac{1}{4\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}, \text{ para } \lambda_1 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4\cdot 1} = \dfrac{1}{4}, \text{ para } \lambda_2 = 1 \end{cases}$



$\to$ considerando imagem $\mathbb{R}^2$ e não T

$\mathbb{R}^2 \to$ cabeçalho

$T \to$ só letra a

---

(7) Indução finita

Para $n=1 \to \dfrac{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \dfrac{3\operatorname{sen}\frac{x}{2} - 4\operatorname{sen}^3\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \dfrac{3}{2} - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}$

Mas $\cos x = 1 - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} \to \dfrac{3}{2} + \cos x - 1 = \dfrac{1}{2} + \cos x \to$ vale p/ $n=1$ //

Supondo válida para $n=k-1$, vamos ver se vale para $n=k$

$\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(k-1)x = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$

$\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(k-1)x + \cos kx = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} + \cos kx =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} + \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left(\operatorname{sen}\dfrac{(2k-1)x}{2} + \underbrace{\operatorname{sen}\dfrac{(2k+1)x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{(2k-1)x}{2}}_{\operatorname{sen}p - \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}\right) =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}\frac{(2k+1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \to$ vale p/ $n=k$ //

(8) $x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-2)(x+1)$ porque $f(2)=0$ e $f(-1)=\frac{0}{0}$

$mx^2+mx+p=m(x-1)(x+1)$ porque $f(-1)=\frac{0}{0}$ e $x=1$ é raiz

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{(x-\alpha)(x-2)\cancel{(x+1)}}{m(x-1)\cancel{(x+1)}}=\frac{(-1-\alpha)(-1-2)}{m(-1-1)}=\frac{-3(\alpha+1)}{2m}=-6$$

$\alpha+1=4m \to \alpha=4m-1$

$$f(3)=\frac{(3-4m+1)(3-2)}{m\cdot(3-1)}=\frac{4(1-m)}{2m}=\frac{2(1-m)}{m}$$

$$f(4)=\frac{(4-4m+1)(4-2)}{m(4-1)}=\frac{(5-4m)\cdot 2}{3m}$$

$$f(3)f(4)=1 \to \frac{2(1-m)}{m}\cdot\frac{(5-4m)\cdot 2}{3m}=1 \to (4-4m)(5-4m)=3m^2$$

$20-16m-20m+16m^2=3m^2 \to 13m^2-36m+20=0$

$$m=\frac{36\pm\sqrt{36\cdot36-4\cdot13\cdot20}}{26}=\frac{36\pm2\cdot2\sqrt{9\cdot9-13\cdot5}}{26}=\frac{36\pm4\sqrt{81-65}}{26}=$$

$$=\frac{36\pm4\cdot4}{26}=\frac{36\pm16}{26}\begin{cases}\nearrow 52/26=2\\ \searrow 20/26\notin\mathbb{Z}\end{cases}\to m=2$$

$\alpha=4m-1=4\cdot2-1=7$

$a=-(\alpha+2-1)=-(7+2-1)=-8$

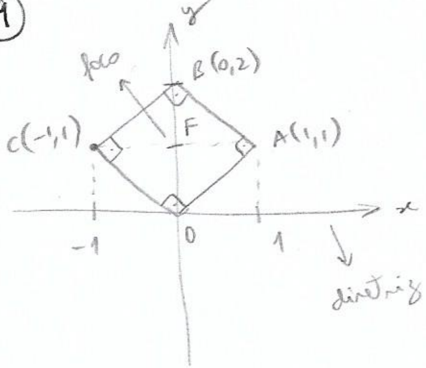
$b=\alpha\cdot2+\alpha(-1)+2(-1)=14-7-2=5$

$c=-(\alpha\cdot2\cdot(-1))=2\alpha=14$

$-\frac{n}{m}=+1-1=0 \to n=0$

$\frac{p}{m}=1\cdot(-1)\to p=-m=-2$

(9)



Parábola = lugar geométrico dos pontos que equidistam do foco e da diretriz

1) $d(A, \text{foco}) = AF = 1$

$d(A, \text{diretriz}) = d(A, \text{eixo } x) = 1$

$A \in P$

$d(C, \text{foco}) = CF = 1$

$d(C, \text{diretriz}) = d(C, \text{eixo } x) = 1$

$C \in P$

2) $(x,y) \in P \rightarrow d(\text{ponto}, \text{foco}) = d(\text{ponto}, \text{diretriz})$

$((y-1)^2 + x^2)^{1/2} = y \rightarrow y^2 - 2y + 1 + x^2 = y^2 \rightarrow y = \dfrac{x^2+1}{2}$ //

3) $BC: y = x+2$

$P: y = \dfrac{x^2+1}{2}$ $\rightarrow x^2+1 = 2x+4 \rightarrow x^2-2x-3=0$ ↗ $x=-1$ (ponto C) ↘ $x = 3$ (ponto D)

$y = x+2 = 3+2 = 5 \rightarrow D(3,5)$ //

4) centro $O' = \left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right) = (1,3)$ ∴ raio $R^2 = O'D^2 = (3-1)^2+(5-3)^2 = 8$

$\Gamma: (x-1)^2+(y-3)^2 = 8 \rightarrow$ potência $= (x-1)^2+(y-3)^2-8$

$M \in P \rightarrow$ potência de $M = (x-1)^2 + \left(\dfrac{x^2+1}{2} - 3\right)^2 - 8 = x^2-2x+1+\dfrac{x^4-10x^2+25}{4} - 8 =$

$= \dfrac{x^4-6x^2-8x-3}{4} = \dfrac{(x+1)^3(x-3)}{4}$ //

$$\begin{array}{l|l} x^4+0x^3-6x^2-8x-3 & x+1 \\ \hline -x^4-x^3 & x^3-x^2-5x-3 \\ \quad +x^3+x^2 & \\ \qquad +5x^2+5x & \\ \qquad\quad +3x+3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-5x-3 & x+1 \\ \hline -x^3-x^2 & x^2-2x-3 = (x+1)(x-3) \\ \quad +2x^2+2x & \\ \qquad 3x+3 & \end{array}$$

5) Se um ponto é interior a Γ, então sua potência < 0

$$\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3) < 0$$

$$-1 < x < 3$$

		-1		3	
$x+1$	$-$	o	$+$		$+$
$x+1$	$-$	o	$+$		$+$
$x+1$	$-$	o	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	o	$+$
pot	$+$	o	$-$	o	$+$

Arco CD da parábola exceto C e D //

---

10 a) $f(x) = \ln(1+x) - x \therefore f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \therefore g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \rightarrow f'(x)<0 \rightarrow f \downarrow \\ -1<x<0 \rightarrow f'(x)>0 \rightarrow f \uparrow \end{array}\right\} \quad x=0 \text{ é ponto de máximo}$$

$f(x) < f(0) = 0 \therefore \ln(1+x) - x < 0 \therefore \ln(1+x) < x$

$x > 0 \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g \uparrow \rightarrow g(x) > g(0) = 0 \therefore \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$

$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \therefore x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ //

b) $S(n) = \ln P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \therefore \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} < \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$

$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) < S(n) < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2} \therefore \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2} \therefore \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$$\frac{(n-1)n}{2n^2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6 \cdot 2n^4} < S(n) < \frac{(n-1)n}{2n^2}$$

Se $n \to \infty$, valem os maiores graus $\rightarrow \frac{1}{2} - 0 < S(n) < \frac{1}{2}$ (sanduíche)

$\lim_{n\to\infty} S(n) = \frac{1}{2} \rightarrow$ como $P(n) = e^{S(n)} \rightarrow \lim_{n\to\infty} P(n) = \sqrt{e}$ //