IME – CEE 89/90	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 1

1ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Calcule o determinante da matriz n x n que possui zeros na diagonal principal e todos os outros elementos iguais a 1.

SOLUÇÃO

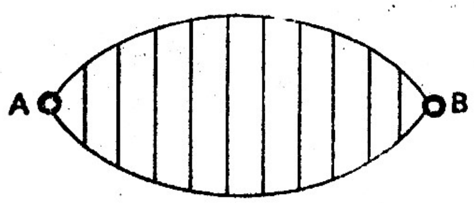
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

IME – CEE 89/90	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 2
2ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão--dupla, ligam as duas estradas principais como mostra a figura. Quantos caminhos, sem auto-interseções, existem de A até B.

Obs.: Caminho sem auto-interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.



SOLUÇÃO

2^{11}

3ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Considere a família de retas representadas pela equação

$$y = mx - \frac{p(1+m^2)}{2m},$$

onde p é uma constante positiva dada e m um número real variável.

a) Determine a condição para que num ponto $M = (x_0, y_0)$ do plano cartesiano, passem duas retas dessa família.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos M para os quais as retas que por eles passem sejam perpendiculares.

SOLUÇÃO

$$y_0 = mx_0 - \frac{p(1+m^2)}{2m}$$

$$\rightarrow 2my_0 = 2m^2 x_0 - p - pm^2$$

$$(p-2x_0)m^2 + 2y_0 m + p = 0$$

$$\Delta > 0 \rightarrow 4y_0^2 - 4p(p-2x_0) > 0$$

$$y_0^2 > p(p-2x_0)$$

$$y_0^2 > -2p\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)$$

b) $m_1 m_2 = -1$

$$\frac{p}{p-2x_0} = -1$$

$$p = -p + 2x_0$$

$$x_0 = p$$

4ª QUESTÃO — VALOR: 1,0

Considere as seguintes funções:

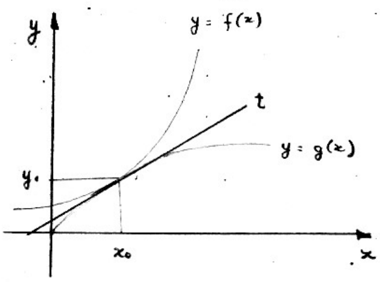
$$f(x) = a^x \quad \text{onde} \quad a > 1$$
$$g(x) = \sqrt{2px} \quad \text{onde} \quad p > 0$$

Mostre que uma condição necessária e suficiente para que seus gráficos se tangenciem é

$$a = e^{\frac{p}{e}}$$

Neste caso, determine, em função de p, a equação da tangente comum.

SOLUÇÃO



$$f(x_0) = g(x_0).$$
$$a^{x_0} = \sqrt{2px_0} \quad (*)$$
$$f'(x_0) = g'(x_0)$$
$$\rightarrow a^{x_0} \ln a = \frac{2p}{2\sqrt{2px_0}}$$

$$2p x_0 . \ln a = p$$
$$2x_0 = \frac{1}{\ln a} = \log_a e$$
$$\rightarrow e = a^{2x_0}$$

$$(*)^2 \rightarrow \underbrace{a^{2x_0}}_{e} = 2px_0.$$

$$\ln a = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{\cancel{2}\frac{e}{\cancel{2}p}} = \frac{p}{e} \qquad a = e^{\frac{p}{e}}$$

$$x_0 = \frac{e}{2p}$$

$$y_0 = \sqrt{2p\frac{e}{2p}} = \sqrt{e} \quad \therefore \quad m_t = y' = \frac{p}{\sqrt{e}}$$

$$t: y - \sqrt{e} = \frac{p}{\sqrt{e}}\left(x - \frac{e}{2p}\right)$$

$$\sqrt{e}\,y - e = px - \frac{e}{2}$$

$$px - \sqrt{e}\,y + \frac{e}{2} = 0$$

IME – CEE 89/90	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 6.
5ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

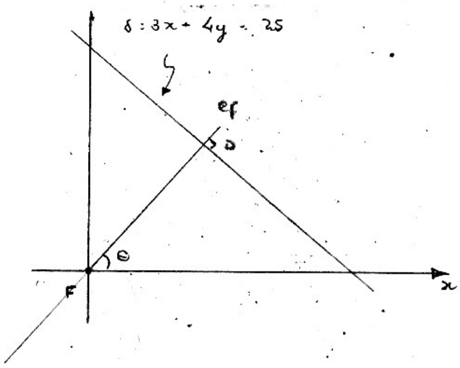
Na elipse de excentricidade 1/2 , foco na origem e reta diretriz dada por 3x + 4y = 25, determine:

a) os vértices da elipse;

b) o outro foco;

c) a equação da outra reta diretriz.

SOLUÇÃO



$ef \perp \delta$

$(0,0) \in ef \rightarrow ef: 4x - 3y = 0$

$tg\,\theta = \frac{4}{3} \begin{cases} sen\,\theta = \frac{4}{5} \\ cos\,\theta = \frac{3}{5} \end{cases}$

$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$

$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$

$\delta: \frac{9}{5}x' - \frac{12}{5}y' + \frac{16}{5}x' + \frac{12}{5}y' = 25$

$\delta \rightarrow x' = 5$

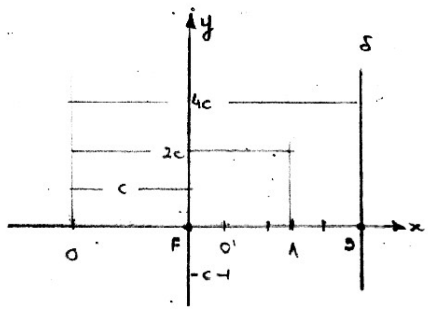
$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = 2c$

$d_{(\delta,O)} = \frac{a}{e} = 2a = 4c$

$4c_1 - c_1 = 5 \rightarrow c_1 = \frac{5}{3}$

$4c_2 + c_2 = 5 \rightarrow c_2 = 1$

$O\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$



$A\left(\frac{5}{3}, 0\right) \rightarrow A\left(1, \frac{4}{3}\right)$

$A'(-3, 0) \rightarrow A'\left(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$

$B\left(-\frac{5}{3}, \pm\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow B\left(-1 \mp \frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{4}{3} \pm \sqrt{3}\right)$

$F'\left(-\frac{10}{3}, 0\right) \rightarrow F'\left(-2, -\frac{8}{3}\right)$

$\delta': -\frac{23}{5} \rightarrow D'\left(-5, -\frac{20}{3}\right)$

$\delta': 3x + 4y + d = 0$

$D' \in \delta' \rightarrow -15 - \frac{80}{3} + d = 0$

$d = \frac{125}{3}$

$\delta': 3x + 4y + \frac{125}{3} = 0$

IME – CEE 89/90	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 8
6ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Considere a função $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{1/n}$ definida em $0 < x < \infty$. Calcule o valor da f em cada ponto e esboce seu gráfico.

SOLUÇÃO

$x > 1$

$0 < \frac{1}{x} < x \rightarrow 0 < \frac{1}{x^n} < x^n$

$x^n < x^n + \frac{1}{x^n} < 2x^n$

$x < \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{1/n} < x\sqrt[n]{2}$

$\Downarrow$

x

$f(x) = x$

$0 < x < 1$

$0 < x < \frac{1}{x} \rightarrow 0 < x^n < \frac{1}{x^n}$

$\rightarrow \frac{1}{x^n} < x^n + \frac{1}{x^n} < \frac{2}{x^n}$

$\rightarrow \frac{1}{x} < \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) < \frac{\sqrt[n]{2}}{x}$

$\Downarrow$

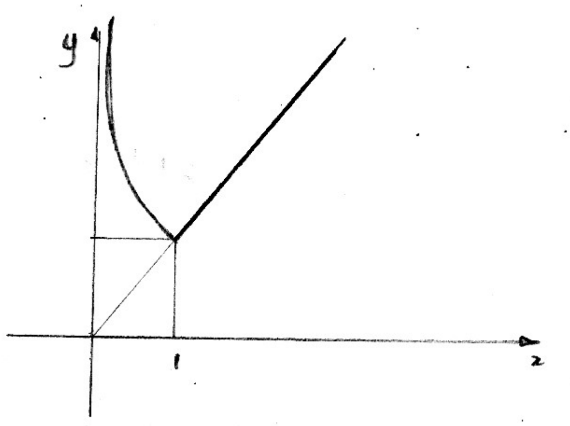
$\frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$x = 1$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1^n + 1^n\right)^{1/n}$

$f(x) = 1$



7ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Resolva a equação

$$z^5 = \overline{z}$$

onde $\overline{z}$ é o conjugado do número complexo z.

SOLUÇÃO

$z^5 = \overline{z}$

$z = r \operatorname{cis} \alpha \rightarrow \overline{z} = r \operatorname{cis} -\alpha$

$r^5 \operatorname{cis} 5\theta = r \operatorname{cis} (-\theta)$

$$\begin{cases} r^5 = r \\ 5\theta - (-\theta) = 2k\pi \end{cases}$$

$r^5 = r \rightarrow \begin{matrix} r = 0 \rightarrow z = 0 \\ r = 1 \end{matrix}$

$6\theta = 2k\pi \rightarrow \theta = \dfrac{k\pi}{3}$

$z_k = \operatorname{cis} \dfrac{k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

IME – CEE 89/90	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 11
8ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Seja f uma função definida nos inteiros positivos satisfazendo:

$$f(1) = 1$$
$$f(2n) = 2 \cdot f(n) + 1$$
$$f(f(n)) = 4n + 3$$

Calcule f(1990).

SOLUÇÃO

$f(2) = f(2 \times 1) = 2f(1) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

$f(3) = f(f(2)) = 4 \times 2 - 3 = 5$

$f(4) = f(2 \times 2) = 2f(2) + 1 = 2 \times 3 - 1 = 7$

$f(n) = 2n - 1$

Supondo válida para todo $N < k$

$k = 2m \quad f(k) = f(2m) + 1 = 2(\underbrace{2m}_{k} - 1) + 1 = 2k - 1$

$k = 2m - 1 \quad f(k) = f(2m-1) = f(f(m)) = 4m - 3 = 2(\underbrace{2m}_{k} - 1) - 1 = 2k - 1$

$\rightarrow$ vale para k

$f(1990) = 2 \cdot 1990 - 1 = 3979$

9ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Imebol é um jogo de três jogadores. Em cada partida o vencedor marca a pontos, o segundo colocado marca b pontos e o terceiro colocado marca c pontos, onde $a > b > c$ são inteiros positivos. Certo dia Marcos, Flávio e Ralph resolveram jogar imebol, e após algumas partidas a soma dos pontos era:

Marcos — 20 Flávio — 10 Ralph — 9.

Sabe-se que Flávio venceu a segunda partida. Encontre quantos pontos cada um marcou em cada partida disputada.

SOLUÇÃO

$M = 20$, $F = 10$, $R = 9$

n : nº de partidas

$\rightarrow n(a+b+c) = 20 + 10 + 9 = 39$ $\begin{cases} 3 \times 13 \\ \cancel{1 \times 39} \end{cases}$

$n \geq 2$

$c \geq 1 \rightarrow b > c \rightarrow b \geq 2 \rightarrow a > b \rightarrow a > 3$

$a + b + c \geq 3 + 2 + 1 = 6$

$\begin{cases} n = 3 \\ a + b + c = 13 \end{cases}$

$F: \ a + 2c = 10$

$R \begin{cases} 3b = 9 \quad \text{ou} \\ 2b + c = 9 \end{cases}$

$3b = 9 \rightarrow b = 3$

$\rightarrow \begin{cases} a + c = 10 \\ a + 2c = 10 \end{cases}$

$c = 0$ (não serve)

$\begin{cases} 2b + c = 9 \\ a + b + c = 13 \\ a + 2c = 10 \end{cases} (-)$

continua acima

$b - c = 3$

$3b = 12 \rightarrow b = 4$, $c = 1$, $a = 8$

	M	F	R
1:	8	1	4
2:	4	8	1
3:	8	1	4

10ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Para que valores de p a equação $x^4 + px + 3 = 0$ tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.

SOLUÇÃO

$P(x) = x^4 + px + 3$

$P'(x) = 4x^3 + p$

$P(\alpha) = \alpha^4 + p\alpha + 3 = 0$

$P'(\alpha) = 4\alpha^3 + p = 0 \rightarrow (\times\alpha)$

$\rightarrow 4\alpha^4 + p\alpha$

$(-) = 3\alpha^4 - 3 = 0 \rightarrow \alpha^4 = 1$

$\alpha = 1 \rightarrow p = -4$

$\begin{cases} x_3 x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = -2 \end{cases} \rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$x_2 = x_1 = 1$

$x_3 = -1 + \sqrt{2}i$, $x_4 = -1 - \sqrt{2}i$

$\alpha = -1 \rightarrow p = 4$

$\begin{cases} x_3 x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$

$x_1 = x_2 = 1$

$x_3 = 1 + i\sqrt{2}$, $1 - i\sqrt{2}$

$\alpha = i$

$\rightarrow p = 4i$

$x_3 x_4 = -3$

$x_3 + x_4 = -2i$

$\rightarrow x^2 + 2ix - 3 = 0$

$x_1 = x_2 = i$

$x_3 = \sqrt{2} - i$; $x_4 = -\sqrt{2} - i$

$\alpha = -i$

$\rightarrow p = -4i$

$x_3 x_4 = -3$

$x_3 + x_4 = 2i$

$\rightarrow x^2 - 2i - 3 = 0$

$x_1 = x_2 = -i$

$x_3 = \sqrt{2} + i$, $x_4 = \sqrt{2} + i$