1a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Determine o valor de a para que o sistema abaixo tenha mais de uma solução e resolva-o, neste caso.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

SOLUÇÃO

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9 + a - 2a - (-3 + a^2 + 6) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ ou } a = -3$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + 3 + 2a - (3 + 3a + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 4z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 1 - 4z \\ x = 1 - y + z = 1 - 1 + 4z + z = 5z \end{array}$$

logo:

$$\boxed{S = \{(5\alpha,\ 1 - 4\alpha,\ \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.}$$

2a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Para que os valores de x a função

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{\ln x^4}} \cdot \ln x^2$$

assume o valor $e^{1/4}$?

OBS: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

SOLUÇÃO

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{\ln x^4}} \cdot \ln x^2 = e^{1/4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln x^4} \cdot \ln|x| + \ln(\ln x^2) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\ell n|x|} \cdot \ell n|x| + \ell n(\ell n\, x^2) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{4}} + \ell n(\ell n\, x^2) = \cancel{\tfrac{1}{4}} \Rightarrow \ell n(\ell n\, x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \ell n\, x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = e$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{e}}$$

3a. QUESTAO: VALOR: 1,0

a) Mostre que se

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_1 x^3 + a_0 x^4$$

então existe um polinômio g(x) do 2º grau, tal que $p(x) = x^2\, g(x + x^{-1})$

b) Determine todas as raízes do polinômio

$$p(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + x^4.$$

SOLUÇÃO

a) $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_1x^3 + a_0x^4 =$

$= x^2(a_0x^{-2} + a_1x^{-1} + a_2 + a_1x + a_0x^2) =$

$= x^2(a_0(x^{-2} + x^2) + a_1(x^{-1} + x) + a_2) =$

$= x^2(a_0[(x^{-1} + x)^2 - 2] + a_1(x^{-1} + x) + a_2) =$

$= x^2(a_2 - 2a_0 + a_1(x^{-1} + x) + a_0(x^{-1} + x)^2)$

logo, basta tomarmos $g(x) = a_2 - 2a_0 + a_1x + a_0x^2$,

que teremos $p(x) = x^2 \cdot g(x + x^{-1})$.

b) $x = \pm 1$ não é solução

$p(x) = 0 \Rightarrow g(y) = 5 - 2 + 4y + y^2 = 0$, onde $y = x + x^{-1}$

$\Rightarrow y^2 + 4y + 3 = 0$

$y = -3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$y = -1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

4a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja a função

$$f(x) = 6\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

a) Determine os pontos de máximo, mínimo e de inflexão de $f(x)$, caso existam

b) Trace o gráfico desta função

SOLUÇÃO

a) $f(x) = 6(x^{-2} - x^{-1})$

$f'(x) = 6(-2x^{-3} - (-1)x^{-2}) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{6(x-2)}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

	0		2	
$x-2$	−		− 0	+
x^3	−	0	+	+
f'	+	$\nexists$	− 0	+
f	↗		↘	↗

$\Rightarrow (2, -\frac{3}{2})$ é MÍNIMO

NÃO HÁ MÁXIMO

$f'(x) = 6x^{-3}(x-2)$

$f''(x) = 6[-3x^{-4}(x-2) + x^{-3}] = 6x^{-4}[-3(x-2) + x] \Rightarrow f''(x) = \dfrac{12(3-x)}{x^4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

	0		3	
$3-x$	+		+ 0	−
x^4	+	0	+	+
f''	+	$\nexists$	+ 0	−
f	∪	$\nexists$	∪	∩

$\Rightarrow (3, -\frac{4}{3})$ É INFLEXÃO

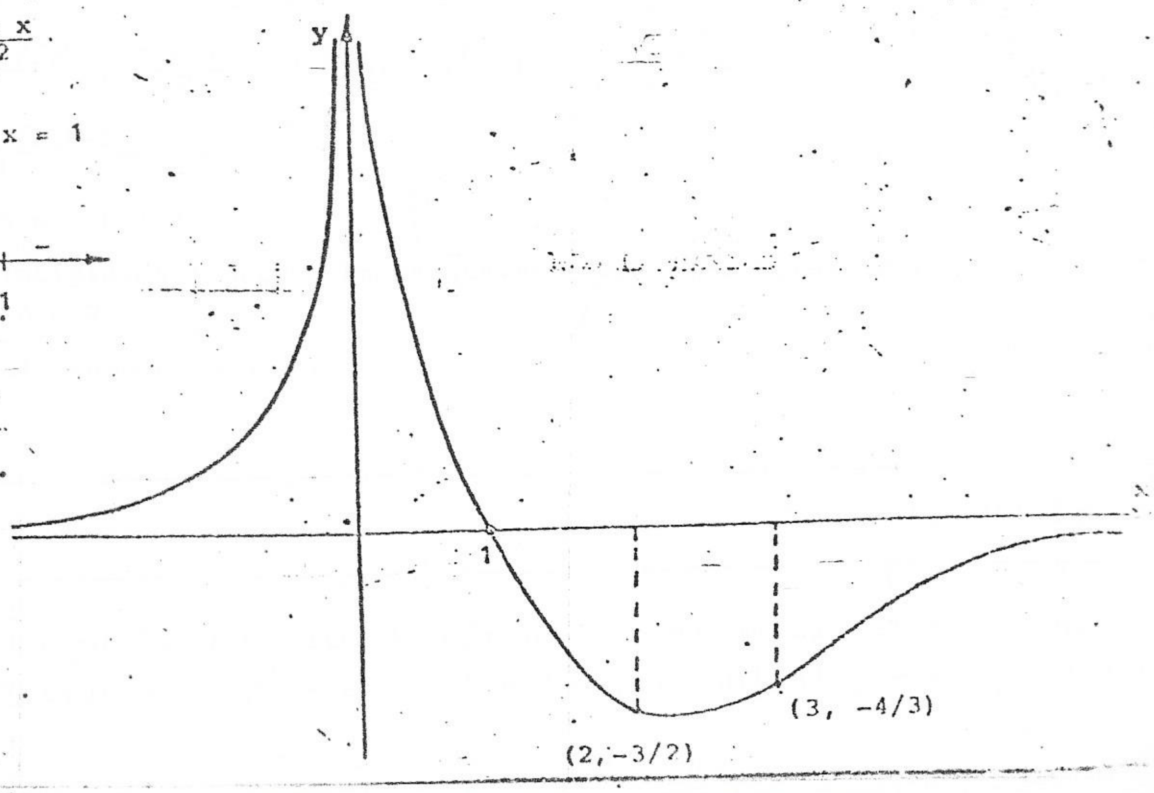
b) $f(x) = 6 \cdot \dfrac{1-x}{x^2}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

f: + (0) + (1) −

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$



5a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Considere a sequência cujos primeiros termos são

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Seja a_n seu n-ésimo termos. Mostre que

$$a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para todo $n \geq 2$

SOLUÇÃO

Temos que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n \geq 1)$

pelo Princípio da Indução Finita:

. $n = 2$:

$a_n = 2$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 2 \quad \text{pois} \quad \sqrt{5} > 1$$

$\Rightarrow$ vale para $n = 2$.

. $n = 3$:

$a_n = 3$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{16+8\sqrt{5}}{8} = 2+\sqrt{5} > 3, \quad \text{pois} \quad \sqrt{5} > 1$$

$\Rightarrow$ vale para $n = 3$.

. supondo que $a_{k+1} < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$ e $a_k < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$, temos:

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k <$$

$$< \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right] =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}.$$

$\Rightarrow$ vale para $n = k + 2$

logo, pelo Princípio da Indução, temos que a propriedade é válida para todo $n \geq 2$.

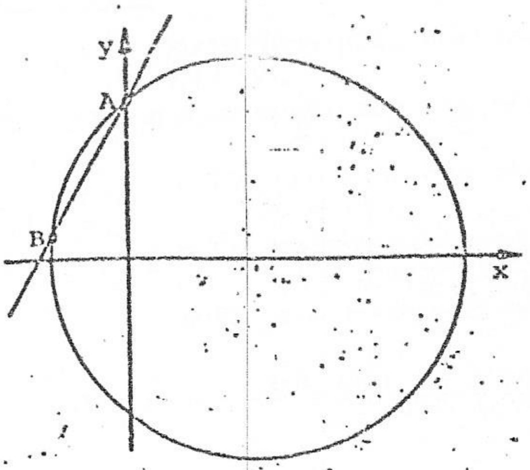
OBSERVAÇÃO: Vale também para $n = 1$.

6a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Determine a equação e o raio do círculo de menor diâmetro, que possue com o círculo $x^2 + y^2 - 8x - 25 = 0$ eixo radical $y - 2x - 5 = 0$.

SOLUÇÃO



interseção:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 25 = 0 \\ y - 2x - 5 = 0 \end{cases} \quad (x-4)^2 + y^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + (2x+5)^2 - 8x - 25 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x_A = 0$$

$$x_B = -\frac{12}{5}$$

$$\therefore A(0,\ 5) \quad e \quad B\left(-\frac{12}{5},\ \frac{1}{5}\right).$$

Como AB será corda da circunferência, para que esta apresente diâmetro mínimo, este deverá ser AB.

Logo:

centro $\Rightarrow$ ponto médio de AB $\Rightarrow C\left(-\frac{6}{5},\ \frac{13}{5}\right)$

raio $\Rightarrow R^2 = AC^2 = \frac{36}{25} + \frac{144}{25} = \frac{180}{25} \Rightarrow \boxed{R = \frac{6\sqrt{5}}{5}}$

equação: $\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{5}\right)^2 = \frac{180}{25}$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + \frac{12}{5}x - \frac{26}{5}y + 1 = 0}$$

7a. QUESTÃO — VALOR: 1,0

Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas distintas esta primeira rodada pode ser realizada ?

Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO

1ª SOLUÇÃO

- o 1º jogador poderá ter 9 adversários;
- o 3º jogador poderá ter 7 adversários;
- o 5º jogador poderá ter 5 adversários;
- o 7º jogador poderá ter 3 adversários;
- o 9º jogador poderá ter 1 adversário.

Logo o número total de modos de se formar a 1ª rodada será:

$$n = 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = \boxed{945 \text{ modos}}$$

2ª SOLUÇÃO

. o 1º jogo pode ser escolhido de $C_{10}^{2} = 45$ modos;

. o 2º jogo pode ser escolhido de $C_{8}^{2} = 28$ modos;

. o 3º jogo pode ser escolhido de $C_{6}^{2} = 15$ modos;

. o 4º jogo pode ser escolhido de $C_{4}^{2} = 6$ modos;

. o 5º jogo pode ser escolhido de $C_{2}^{2} = 1$ modo.

Logo $n = \dfrac{45 \times 28 \times 15 \times 6 \times 1}{5!} = \boxed{945 \text{ modos}}$

OBSERVAÇÃO:

Se considerarmos que cada partida pode ser feita de 2 maneiras pela escolha de que jogador terá as peças brancas, teríamos:

$n = 2^5 \times 945 = 30.240$ modos.

8a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

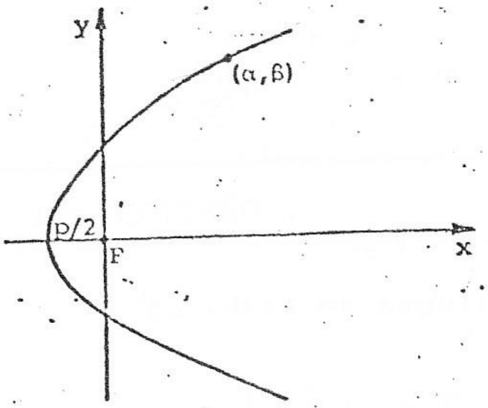
Mostre que por todo ponto não situado sobre o eixo OX passam exatamente 2 parábolas com foco na origem e eixo de simetria OX e que estas parábolas interceptam-se ortogonalmente.

SOLUÇÃO

$y = 2px'$
$x' = x + \frac{p}{2}$

$(P): y^2 = 2p(x + \frac{p}{2})$ ou

$y^2 = -2p(x - \frac{p}{2})$



– logo, de um modo geral, temos:

$y^2 = 4k(x + k)$

se $(\alpha,\beta) \in (P) \Rightarrow$

$\beta^2 = 4k(\alpha + k)$

$\Rightarrow 4k^2 + 4\alpha k - \beta^2 = 0$ → k_1 → k_2 → $k_1 \cdot k_2 = -\frac{\beta^2}{4}$

$\Delta = 16\alpha^2 + 16\beta^2 > 0$

$\Rightarrow$ há sempre 2 soluções distintas

$\Rightarrow$ há sempre 2 parábolas

$y^2 = 4kx + 4k^2 \Rightarrow 2yy' = 4k \Rightarrow y' = \frac{2k}{y} = m_t$

no ponto de interseção:

$m_{t_1} \cdot m_{t_2} = \frac{4k_1k_2}{\beta^2} = \frac{4(-\beta^2/4)}{\beta^2} = -1$ $\Rightarrow$ são ORTOGONAIS

9a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Sejam A, B e C matrizes 5 x 5, com elementos reais. Denotando-se por A^t a matriz transporta de A,

a) Mostre que se $AA^t = 0$, então $A = 0$

b) Mostre que se $BAA^t = CAA^t$ então $BA = CA$.

SOLUÇÃO

a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{51} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{52} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{15} & a_{25} & \cdots & a_{55} \end{bmatrix}$$

sendo $P = AA^t = 0 \Rightarrow p_{nn} = a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \ldots + a_{n5}^2 = 0 \Rightarrow a_{ni} = 0 \quad 1 \leq i \leq 5$

logo $\forall n, i, \quad a_{ni} = 0 \Rightarrow A = 0$.

b) Sendo $M = BA - CA$

$$\Rightarrow M^t = (BA - CA)^t = (BA)^t - (CA)^t = A^tB^t - A^tC^t$$

$$\Rightarrow M \cdot M^t = (BA - CA)(A^tB^t - A^tC^t) =$$

$$= BAA^tB^t - \underbrace{BAA^t}_{CAA^t}C^t - \underbrace{CAA^t}_{BAA^t}B^t + CAA^tB^t =$$

$$= B\cancel{AA^t}B^t - C\cancel{AA^t}C^t - B\cancel{AA^t}B^t + C\cancel{AA^t}B^t = 0$$

$$\Rightarrow M = 0$$

$$\Rightarrow BA = CA.$$

10a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Considere os seguintes conjuntos de números complexos:

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \text{Im}(z) > 0 \} \text{ e}$$

$$B = \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = 1, \text{Im}(z) > 0 \},$$

onde Re(z) e Im(z) são as partes real e imaginária do número complexo z, respectivamente.

a) Mostre que para cada $z \in A$, o número $\frac{2z}{z+1}$ pertence a B.

b) Mostre que cada $\omega \in B$ pode ser escrito da forma $\frac{2z}{z+1}$ para algum $z \in A$.

a) $z \in A \Rightarrow z = \text{cis}\,\alpha, \quad \text{sen}\,\alpha > 0$

$$w = \frac{2z}{1+z} = \frac{2\,\text{cis}\,\alpha}{\text{cis}\,\alpha + 1} = \frac{\cancel{2}\,\text{cis}\,\alpha}{\cancel{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,\text{cis}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \text{cis}\,\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 1 + i\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Re}(w) = 1 \\ \text{Im}(w) = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2} > 0 \end{array}\right| \Rightarrow w \in B$$

b) $w \in B \Rightarrow w = 1 + bi, \quad b > 0$

$$w = 1 + i\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{cis}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{cis}\,\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\,\text{cis}\,\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\,\text{cis}\,\alpha}{\text{cis}\,\alpha + 1} = \frac{2z}{z+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{com } |z| = 1 \\ \text{e } \text{Im}(z) = \text{sen}\,\alpha = \dfrac{2\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2b}{1+b^2} > 0 \end{array}\right| \Rightarrow z \in A$$

$\text{cis}\,\alpha + 1 = (\cos\alpha + 1) + i\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right] = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$

$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i\,\text{sen}\,\alpha = i\,\text{sen}\,\alpha + (\cos\alpha + 1)$

IMPORTANTE $\rightarrow$ $\boxed{\text{cis}\,\alpha + 1 = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,\text{cis}\,\frac{\alpha}{2}}$