1ª QUESTÃO:

Determine $\log_{\sqrt{0,333\ldots}} \sqrt{0,037037\ldots}$

SOLUÇÃO

$$0,333\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,037037\ldots = \frac{37}{999} = \frac{1}{27}$$

Logo:

$$\log_{\sqrt{0,333\ldots}} \sqrt{0,037037} = \log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{1}{27}} = 3$$

2.ª QUESTÃO:

No produto abaixo, o "*" substitui algarismos diferentes do "3" e não necessariamente iguais. Determine o multiplicando e o multiplicador.

```
       * * 3 *
         * * 3
      --------
       3 * * *
   * * * 3 3
   * * * *
 -------------
 * * * * * * *
```

SOLUÇÃO

Sejam: multiplicando: ab3c
multiplicador: de 3

assim:

como 3 x ab3c começa por 3 → $\underline{a = 1}$ e $b \leq 3$ → $b \in \{0,1,2\}$ $\{(b \neq 3)\}$

(e x c) termina por $\underline{3}$ → logo um é $\underline{7}$ e outro é $\underline{9}$

- se e = 7 e c = 9 → 1 * 39 x 7 = * * * 73 → não serve
- se e = 9 e c = 7 → 1 * 37 x 9 = * * * 33 → ok

como há " vai um" na soma das 3 parcelas, então o produto começa por 1

→ a 3a. parcela começa por $\underline{8}$ ou $\underline{9}$

→ $\underline{d}$ só pode ser 9,8,7,6 ou 5

e:

$b = 0 \rightarrow d = 8$ ou $\cancel{9}$ $(d \neq e)$

$b = 1 \rightarrow d = 8$

$b = 2 \rightarrow d = 8$ ou 7

mas:

$1037 \times 893 < 10^6$

$1137 \times 893 = 1015341$ → não serve (algarismo 3)

$1237 \times 893 = 1104641$ → ok

$1237 \times 793 < 10^6$

Logo o multiplicando é 1237 e o multiplicador é 893.

3ª QUESTÃO:

Seja N^* o conjunto dos naturais não nulos e $n \in N^*$.

Mostre que a relação $\mathcal{R}_n = \{(a, b) \mid a, b \in N^* \text{ e } |a - b| \text{ é múltiplo de } n\}$ é uma relação de equivalência.

SOLUÇÃO

M é múltiplo de n $\Leftrightarrow \exists\, k \in Z$ tal que $M = kn$

(i) Reflexiva

$$\text{se } a \in N^* \rightarrow |a - a| = 0 = 0.n$$
$$\rightarrow a\,\mathcal{R}_n\,a,\ \forall a \in N^*$$

(ii) Simétrica

$$a\,\mathcal{R}_n\,b \rightarrow |a - b| = k.n \quad (k \in Z)$$
$$\rightarrow |b - a| = |a - b| = k.n$$
$$\rightarrow b\,\mathcal{R}_n\,a$$

(iii) Transitiva

$$a\,\mathcal{R}_n\,b \text{ e } b\,\mathcal{R}_n\,c \rightarrow |a - b| \rightarrow = k_1 n \rightarrow a-b = \pm k_1 n \;\Big|\; \overset{(+)}{\rightarrow} a-c = (k_1 \pm k_2)n$$
$$|b - c| \rightarrow = k_2 n \quad b-c = \pm k_2 n \quad \rightarrow |a-c| = |k_1 \pm k_2|\,n$$

$$\text{como } k_1, k_2 \in Z \rightarrow k = |k_1 \pm k_2| \in Z$$
$$\rightarrow a\,\mathcal{R}_n\,c$$

de (i), (ii) e (iii) temos que a relação é de EQUIVALÊNCIA.

4a. QUESTÃO:

Uma padaria trabalha com 4 tipos de farinha cujos teores de impureza são os seguintes:

tipo	teor
A	8%
B	12%
C	16,7%
D	10,7%

Para fabricar farinha tipo D, o padeiro mistura uma certa quantidade de farinha A com 300 gramas de farinha tipo B; em seguida substitui 200 gramas dessa mistura por 200 gramas de farinha tipo C.

Determine a quantidade de farinha tipo A utilizada.

SOLUÇÃO

- seja $\underline{m}$ a massa de farinha $\underline{A}$ usada.

o teor de impureza na mistura de $\underline{A}$ e $\underline{B}$ é: $\frac{8m + 12 \times 300}{m + 300}\% = \frac{8m + 3600}{m + 300}\%$

Para fabricar a farinha $\underline{D}$, toma-se $(m+100)$g da mistura de $\underline{A}$ e $\underline{B}$ e 200 gramas da farinha $\underline{C}$, resultando $(m+300)$g de farinha $\underline{D}$.

assim:

$$\frac{8m + 3600}{m + 300} \times (m+100) + 16,7 \times 200 = 10,7 \times (m+300)$$

$$\rightarrow (8m + 3600)(m + 100) + 3340(m + 300) = 10,7(m + 300)^2$$

$$\rightarrow 8m^2 + 4400m + 360000 + 3340m + 1002000 = 10,7(m^2 + 600m + 90000)$$

$$\rightarrow 2,7m^2 - 1320m - 399000 = 0$$

$$\Delta = 1742400 + 4 \times 2,7 \times 399000 = (2460)^2$$

$$\rightarrow m = \frac{1320 \pm 2460}{5,4} \rightarrow m = 700g$$

5ª QUESTÃO:

A derivada de ordem n de uma função $y = f(x)$ é a primeira derivada da derivada de ordem n-1 da mesma função, ou seja:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\, y^{(n-1)}$$

Calcule $[(x^2 + 1)\ \mathrm{sen}\ x]^{(20)}$

SOLUÇÃO

$y = (x^2 + 1)\ \mathrm{sen}\ x = f(x)g(x)$

pela fórmula de Leibnitz: $[f(x).g(x)]^{(n)} = \sum C_n^k \,.\, f^{(n-k)}(x).g^{(k)}(x)$

como:

$$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 2x$$
$$f''(x) = 2$$
$$f^{(n)}(x) = 0\ ,\ n \geqslant 3$$

$$g(x) = \mathrm{sen}x \rightarrow g^{(4k)}(x) = \mathrm{sen}x$$
$$g^{(4k+1)}(x) = \cos x$$
$$g^{(4+2)}(x) = -\ \mathrm{sen}x$$
$$g^{(4+3)}(x) = -\ \cos x$$

logo:

$$[(x^2+1).\mathrm{sen}x]^{20} = (x^2+1)^{(0)}.\mathrm{sen}^{(20)}(x) + C_{20}^1 (x^2+1)^{(1)}.\mathrm{sen}^{(19)}(x) +$$

$$+\ C_{20}^2 (x^2+1)^{(2)}.\mathrm{sen}^{(18)}(x) = (x^2+1).\mathrm{sen}x + 20.2x(-\cos x) + 190.2.(-\mathrm{sen}x)$$

$$\rightarrow [(x^2+1).\mathrm{sen}x]^{20} = (x^2-379).\mathrm{sen}x - 40x\cos x$$

6ª. QUESTÃO:

Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos determinados pela interseção da cônica $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ com as retas de coeficiente angular igual a $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO

seja r: $y = \frac{1}{2}x + h \rightarrow x = 2y - 2h \rightarrow x = 2y - k$

Interseção (sistema):

$$5(2y - k)^2 - 6(2y - k).y + 5y^2 - 4(2y - k) - 4y - 4 = 0$$

$$\rightarrow 5(4y^2 - 4ky + k^2) - 12y^2 + 6ky + 5y^2 - 8y + 4k - 4y - 4 = 0$$

$$\rightarrow 13y^2 - (14k + 12)y + 5k^2 + 4k - 4 = 0$$

a soma das ordenadas dos pontos de interseção é: $y_1 + y_2 = \frac{14k + 12}{13}$

logo, sendo M(x,y) o ponto médio, temos:

$$y = \frac{7k + 6}{13} \quad \ldots (1)$$

$$x = 2 \cdot \frac{7k + 6}{13} - k = \frac{k + 12}{13} \quad \ldots (2)$$

eliminando-se o parâmetro k:

$$(1) \rightarrow \quad k = \frac{13y - 6}{7}$$

$$(2) \rightarrow \quad k = 13x - 12$$

$$\rightarrow 7(13x - 12) = 13y - 6$$

$$\rightarrow 91x - 84 = 13y - 6$$

$$\rightarrow 91x - 13y = 78$$

$$\rightarrow 7x - y = 6$$

$$\rightarrow y = -7x + 6$$

o lugar geométrico é o segmento da reta de equação acima, interno à elipse dada.

4a. QUESTÃO:

Seja a curva, representada pela equação

$$y = \frac{w\ell}{1 + w\ell} + \frac{1}{1 + w\ell} \cdot \sum_{i=1}^{4} \frac{w}{w + \lambda_i}$$

onde: $\ell, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ são constantes reais tais que $1 > \lambda_{i+1} > \lambda_i > \ell > 0$.

Esboce o gráfico de y, caracterizando as assíntotas, num sistema cartesiano ortogonal.

SOLUÇÃO

Fazendo-se:

$$a = \frac{1}{\ell}; \quad b = \frac{1}{\lambda_1}; \quad c = \frac{1}{\lambda_2}; \quad d = \frac{1}{\lambda_3}; \quad e = \frac{1}{\lambda_4}$$

vem:

$$y = \frac{a}{w+a}\left(4 + \frac{w}{a} - \frac{1}{bw+1} - \frac{1}{cw+1} - \frac{1}{dw+1} - \frac{1}{ew+1}\right)$$

Assíntotas:

Não verticais: $m = \lim_{w \to \pm\infty} \frac{y}{w} = 0$

$h = \lim_{w \to \pm\infty} (y - mw) = 1$ → Horizontal: $y = 1$

Verticais:

$$w = -\ell^{-1} \; ; \quad w = -\lambda_i \; ; \quad i = 1,2,3,4$$

Observando-se:

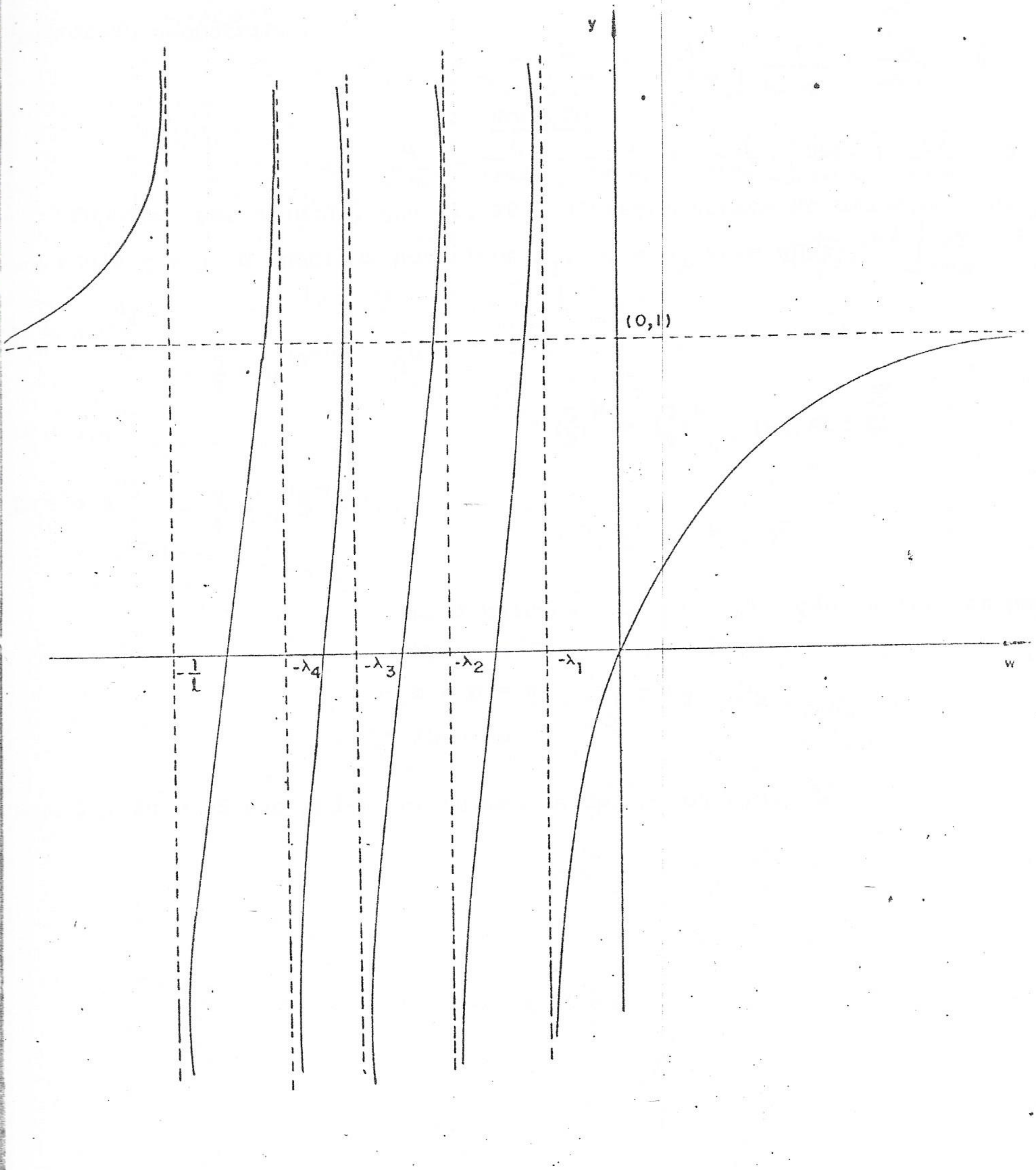
(1) $\lim_{w \to +\infty} y = 1^-$ e $\lim_{w \to -\infty} y = 1^+$;

(2) que a função só não é derivável nos pontos $-\frac{1}{\ell}$ e $-\lambda_i$ em que não é contínua;

(3) limites laterais nos pontos de descontinuidade;

resulta o esboço gráfico:

7a. QUESTÃO:



8ª. QUESTÃO:

Mostre que os números 12, 20 e 35 não podem ser termos de uma mesma progressão geométrica.

SOLUÇÃO

Supondo, por absurdo, que 12, 20 e 35 sejam termos de uma P.G. – existem reais $\underline{a}$ e $\underline{q}$ e inteiros positivos n_1, n_2 e n_3 tais que:

$$12 = a.q^{n_1}$$

$$\rightarrow \frac{5}{3} = q^{n_2-n_1} = q^n$$

$$20 = a.q^{n_2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^p = \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad (p, n \in \mathbb{Z})$$

$$35 = a.q^{n_3} \quad \rightarrow \frac{7}{4} = q^{n_3-n_2} = q^p$$

$$\rightarrow 2^{2n} . 5^p = 3^p . 7^n$$

pela unicidade da decomposição em fatores primos.

$\rightarrow n = p = 0 \qquad n_1 = n_2 = n_3$

$\rightarrow$ Absurdo

logo 12, 20 e 35 não podem ser termos de uma mesma P.G.

9a. QUESTÃO:

Sabendo-se que x é um número real, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq \text{arc cos } x \leq \pi$ e $\underline{n}$ é um número inteiro positivo, mostre que a expressão

$f_n(x) = \cos(n \text{ arc cos } x)$ pode ser desenvolvida como um polinômio em $\underline{x}$, de grau $\underline{n}$, cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 2^{n-1}.

SOLUÇÃO

$$f_1(x) = \cos(1.\arccos x) = \cos(\arccos x) \rightarrow f_1(x) = x = 2^0.x$$

$$f_2(x) = \cos(2.\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 \rightarrow f_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$f_{n+1}(x) = \cos((N+1).\underbrace{\arccos x}_{\alpha}) = \cos(n\alpha + \alpha) =$$

$$= \underbrace{\cos(n\alpha)}_{f_n(x)} . \underbrace{\cos\alpha}_{f_1(x)=x} - \text{sen}(n\alpha).\text{sen}\alpha = x.f_n(x) - \frac{1}{2}[\underbrace{\cos(n-1)\alpha}_{f_{n-1}(x)} - \underbrace{\cos(n+1)\alpha}_{f_{n+1}(x)}]$$

$$\rightarrow 2f_{n+1}(x) = 2x.f_n(x) - f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x)$$

$$\rightarrow f_{n+1}(x) = 2x.f_n(x) - f_{n-1}(x)$$

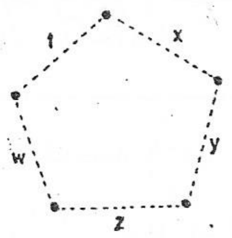
logo, se $f_n(x)$ e $f_{n-1}(x)$ forem polinômios de graus $\underline{n}$ e $\underline{(n-1)}$, respectivamente, com coeficientes dos termos de maior grau 2^{n-1} e 2^{n-2}, então $f_{n+1}(x)$ será do grau $(n+1)$ e terá coeficiente $2.2^{n-1} = 2^n$, como a propriedade é válida para $n = 1$ e $n = 2$, pelo princípio da Indução temos que é válida $\forall n \in N^*$.

10a. QUESTÃO:

12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

SOLUÇÃO

sejam x,y,z,w, t os números de cavaleiros sentados entre os escolhidos.



$\rightarrow$ $x + y + z + w + t = 7$

com $x,y,z,w,t \geqslant 1$

$\rightarrow$ número de soluções inteiras positivas da equação

$\rightarrow$ $N = C_6^4 = C_6^2 = \frac{6\times 5}{2} = 15$

$\rightarrow T = \frac{12}{5} \times N = \frac{12}{5} \times 15 \quad \rightarrow T = 36$