1a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Sejam as funções

$$Z = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad Y = \sqrt{1-x^4}$$

Mostre que no subconjunto dos reais onde as funções são definidas

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{Z}{x^4}$$

SOLUÇÃO

$$Z = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \qquad Z = \frac{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})^2}{(1+x^2)-(1-x^2)}$$

$$\rightarrow Z = \frac{1+\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+2\sqrt{1-x^4}}{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}+x^2} \qquad Z = \frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2} = \frac{1+Y}{x^2}$$

$$\rightarrow dZ = \frac{1.x^2-(1+Y)\ .\ 2x\ dx/dY}{x^4}$$

$(1-x^4)^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{2}(1-x^4)^{-1/2}\cdot -4x^3$

$$\text{mas} \quad \frac{dY}{dx} = \frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} \qquad \frac{dx}{dY} = \frac{-Y}{2x^3}$$

logo:

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{x^2-(1+Y)\ .\ 2\cancel{x}\ .\ \frac{-Y}{2\cancel{x^3}}x^2}{x^4}$$

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{\frac{\overbrace{x^4}^{1-Y^2}+Y+Y^2}{x^2}}{x^4} = \frac{1+Y}{x^2}\cdot\frac{1}{x^4} = \frac{Z}{x^4}.$$

2a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Encontre o valor de K para que a reta determinada pelos pontos (0,3) e B (5, -2) seja tangente à curva $Y = \frac{K}{x+1}$ para $X \neq -1$.

SOLUÇÃO

$m_{AB} = \frac{3-(-2)}{0-5}$ $\quad m_{AB} = -1 \quad \rightarrow \quad AB: y = -x + 3.$

$y = k(x+1)^{-1} \rightarrow y' = -k(x+1)^{-2} \rightarrow m_t = \frac{-k}{(x+1)^2}$

AB é tangente à curva $\rightarrow m_t = y' \rightarrow \frac{-k}{(x+1)^2} = -1$

$(x+1)^2 = k = x^2 + 2x + 1 \ldots (1).$

AB C: $-x + 3 = \frac{k}{x+1} \rightarrow k = -x^2 + 2x + 3 \ldots (2).$

(1) e (2): $-x^2 + \cancel{2x} + 3 = x^2 + \cancel{2x} + 1 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 2x^2 = 2 \leftrightarrow x^2 = 1 \leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \leftrightarrow x = 1.$

Assim:

$x = 1 \leftrightarrow k = (1+1)^2 \rightarrow \boxed{k = 4}$

a reta é tangente em (1,2).

3a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Determine o valor de b tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \log_p 5^{t+1} = 4$$

onde

$$p = b^{(t+1)2^t}$$

SOLUÇÃO

$$\log_p 5^{t+1} = \frac{\log_b 5^{t+1}}{\log_b p} = \frac{\cancel{(t+1)}\log_b 5}{\cancel{(t+1)}2^t} = \frac{\log_b 5}{2^t}$$

Logo:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \log_p 5^{t+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \frac{\log_b 5}{2^t} = \log_b 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \frac{1}{2^t}$$

Finalmente:

$2 \cdot \log_b 5 = 4.$

$\log_b 5 = 2$

$b^2 = 5 \rightarrow \boxed{b = \sqrt{5}}$

4a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja A uma relação definida sobre os reais, contendo os pontos pertencentes às retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x$.

Determine os pontos que necessariamente devem pertencer à A para que A seja transitiva.

SOLUÇÃO

Uma relação S é transitiva se:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b) \in S \\ (b,c) \in S\end{array}\right| \rightarrow (a,c) \in S.$$

Do enunciado:

$$(a,b) \in A \rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ \quad \text{ou} \\ a = 2b. \end{cases}$$

Logo, como todos os pontos da forma $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$ pertencem a A:

$$\text{(i)} \quad y = 2x \in A \rightarrow \begin{array}{l} y = 4x \in A \\ y = 8x \in A \\ \quad \vdots \\ y = 2^n x \in A \end{array}$$

$$\text{(ii)} \quad y = \frac{1}{2}x \in A \rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x \in A \\ y = \frac{1}{8}x \in A \\ \quad \vdots \\ y = 2^{-n}x. \end{array}$$

Assim, devemos ter em A, todos os pontos das retas de equação:

$$y = 2^k x; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Sejam z_1 e z_2 complexos de raios vetores OP_1 e OP_2, respectivamente.

Mostre que OP_1 e OP_2 são perpendiculares se e somente se $z_1 \bar{z}_2$ é um imaginário puro.

Notação: $\bar{z}$ é o conjugado de z

SOLUÇÃO

Sejam:

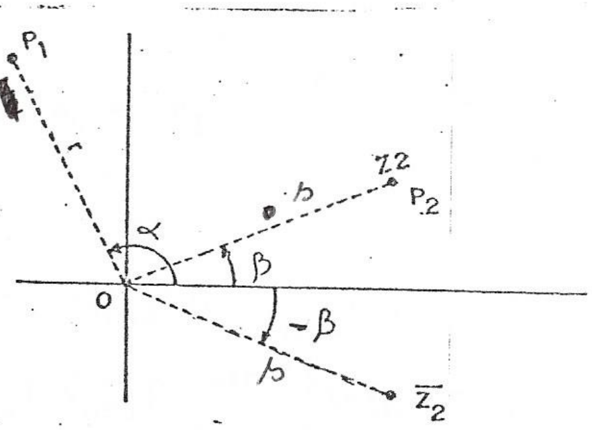
$OP_1 = r \cdot \text{cis}\ \alpha$

$OP_2 = s \cdot \text{cis}\ \beta$

$OP_1 \perp OP_2 \leftrightarrow \alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$

$z_1 \cdot \bar{z}_2 = r.s\ \text{cis}(\alpha - \beta) = (r.s)i$

pois $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ e $\text{cis}\ \frac{\pi}{2} = i$



6a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Sabe-se que as raízes do polinômio abaixo são todas reais e distintas

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$; onde

$a_i \in \mathbb{R}, \; i = 0, 1, \ldots n; \; a_n \neq 0$

Mostre que a derivada $f'(x)$ possui também todas as suas raízes reais e distintas.

SOLUÇÃO

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ as n raízes reais e distintas de $f(x)$

Como f é polinômio: f é contínua em $[\alpha_1, \alpha_{i+1}]$

f é derivável em (α_i, α_{i+1})

$f(\alpha_i) = f(\alpha_{i+1}) = 0$

pelo teorema de Rolle, existe $C_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ tal que $f'(C_i) = 0$.

Como temos $n+1$ intervalos da forma (α_i, α_{i+1}), todos disjuntos, em cada intervalo existe uma raiz distinta de f'.

Como f' é do grau $n-1$, todas suas raízes são reais e distintas.

7a. QUESTÃO ITEM A — VALOR: 0,4

Seja a sequência $\{v_n\}$, n = 0, 1, 2, . . ., definida a partir de seus dois primeiros termos v_0 e v_1 e pela fórmula geral

$$v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2} \quad , \text{ para } n \geqslant 2$$

Define-se uma nova sequência $\{u_n\}$, n = 0, 1, 2, . . ., pela fórmula

$$v_n = 3^n u_n$$

a) Calcule $u_n - u_{n-1}$ em função de u_0 e u_1

SOLUÇÃO

1ª Solução:

$$U_n - U_{n-1} = 3^{-n}.V_n - 3^{-(n-1)}.V_{n-1} = 3^{-(n-1)}[3^{-1}V_n - V_{n-1}] =$$

$$= 3^{-(n-1)}.[3^{-1}(6V_{n-1}-9V_{n-2})-V_{n-1}] = 3^{-(n-1)}[2V_{n-1}-3V_{n-2}-V_{n-1}] =$$

$$= 3^{-(n-1)}.V_{n-1} - 3^{-(n-2)}.V_{n-2}$$

$$= U_{n-1} - U_{n-2}$$

Indutivamente, temos que: $\boxed{U_n - U_{n-1} = U_1 - U_0}$

2ª Solução:

Equação a Diferença Finita Homogênea:

$$V_n - 6V_{n-1} + 9V_{n-2} = 0.$$

Equação Resolvente:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow \text{raízes} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Termo Geral:

$$V_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n = 3^n(C_1 + C_2 n)$$

Como $V_n = 3^n U_n$, temos que:

$$U_n = C_1 + C_2 n \rightarrow \begin{cases} U_o = C_1 \\ U_1 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$U_n - U_{n-1} = (C_1 + C_2 n) - (C_1 + C_2(n-1)) = C_2 = \underline{U_1 - U_o}$$

7a. QUESTÃO: ITEM B VALOR: 0,3

b) Calcule u_n e v_n em função de n, v_1 e v_0

1ª Solução:

$$U_n - \cancel{U_{n-1}} = U_1 - U_o$$

$$\cancel{U_{n-1}} - \cancel{U_{n-2}} = U_1 - U_o$$

$$\vdots$$

$$\cancel{U_1} - U_o = U_1 - U_o$$

$$U_n - U_o = n(U_1 - U_o) \rightarrow U_n = nU_1 - (n-1)U_o$$

$$\rightarrow \underline{U_n = \frac{n}{3} V_1 - (n-1)V_o}$$

$$\rightarrow \underline{V_n = 3^{(n-1)} . n . V_1 - (n-1) . 3^n . V_o}$$

2ª Solução:

$$V_o = C_1$$

$$V_1 = 3(C_1 + C_2) \leftrightarrow \frac{V_1 - 3V_o}{3} = C_2$$

logo:

$$\underline{V_n = 3^n \left(V_o + \frac{n(V_1 - 3V_o)}{3}\right)}$$

$$\underline{U_n = V_o + \frac{n(V_1 - 3V_o)}{3}}$$

7a. QUESTÃO: ITEM C VALOR: 0,3

c) Identifique a natureza das sequências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ quando

$v_1 = 1$ e $v_0 = \frac{1}{3}$

1ª Solução:

(i) $V_o = 1/3 \rightarrow U_o = 1/3$

$V_1 = 1 \rightarrow U_1 = 1/3$

$U_n - U_{n-1} = U_1 U_o = 0 \rightarrow \{U_n\}$ é constante

(ii) $V_n = n.3^{n-1} - (n-1).3^n.\frac{1}{3} \rightarrow V_n = n.3^{n-1} - (n-1).3^{n-1}$

$\rightarrow V_n = 3^{n-1}$

$\{V_n\}$ é uma P.G. não limitada

2ª Solução:

$C_1 = V_o = 1/3$

$C_2 = \dfrac{V_1 - 3V_o}{3} = 0$

Logo:

$V_n = 3^n.\frac{1}{3} = 3^{n-1}$ .... Seqüência Exponencial

$U_n = \frac{1}{3}$ .... Seqüência Constante

8a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Dois clubes do Rio de Janeiro participaram de um campeonato nacional de futebol de salão onde cada vitória valia um ponto, cada empate meio ponto e cada derrota zero ponto. Sabendo que cada participante enfrentou todos os outros apenas uma vez, que os clube do Rio de Janeiro totalizaram, em conjunto, 8 pontos e que cada um dos outros clubes alcançou a mesma quantida K de pontos, determine a quantidade de clubes que participou do torneio.

SOLUÇÃO

1ª Solução:

Sejam n os participantes:

Número de partidas: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

O total de pontos é igual ao número de partidas: $T = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$T = 8 + k.(n-2) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$n^2 - n = 16 + 2kn - 4k$$

$$\rightarrow \quad k = \frac{n^2 - n - 16}{2(n-2)} = \frac{n+1}{2} - \frac{7}{n-2}$$

Como k é inteiro, só há 2 hipóteses:

(i) as 2 frações são inteiras: $\left.\begin{array}{l} n-2 \mid 7 \\ n \geq 2 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} n=3 \rightarrow k<0 \\ n=9 \rightarrow k=4. \end{array}$

(ii) as 2 frações têm denominador 2: $n-2 = 14 \rightarrow \begin{array}{l} n=16 \\ k=8. \end{array}$

Resposta: $n = 9$ clubes
$n = 16$ clubes.

2ª Solução:

Total de times: $n+2$.

Total de jogos e pontos: C^2_{n+2}.

$$C^2_{n+2} = nk + 8$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = nk + 8$$

$$n^2 + (3-2k)n - 14 = 0$$

$$\Delta = (3-2k)^2 + 56 = t^2$$

$$t^2 - (3-2k)^2 = 56$$

$$(t+3-2k)(t-3+2k) = \begin{cases} 56 \times 1 \\ 28 \times 2 \\ 14 \times 4 \\ 8 \times 7 \\ 7 \times 8 \\ 4 \times 14 \\ 2 \times 28 \\ 56 \times 1 \end{cases}$$

Logo: $\begin{cases} t + 3 - 2k = a \\ t - 3 + 2k = b \end{cases} \rightarrow 2t = a + b \quad \text{e} \quad 4k = b - a + 6$

Então só servem os sistemas para (a=4 e b=14) e (a=2 e b=28)

$$t = \frac{4+14}{2} = 9$$

$$\rightarrow \quad n = \frac{-(-5)+9}{2} = 7 \quad \rightarrow \quad \text{total de clubes} = 9$$

$$k = \frac{14-4+6}{4} = 4$$

$$t = \frac{2+28}{2} = 15$$

$$\rightarrow \quad n = \frac{-(-13)+15}{2} = 14 \quad \rightarrow \quad \text{total de clubes} = 16$$

$$k = \frac{28-2+6}{4} = 8$$

9a. QUESTÃO — VALOR: 1,0

Um exame vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de Matemática.

Determine de quantas formas é possível programar a sequência das 10 provas, de maneira que duas provas da área de Matemática não se sucedam.

SOLUÇÃO

Programando as 7 outras provas: $P_7 = 7! = 5040$.

Dado um arranjo das 7 provas

x - x - x - x - x - x - x - x

existem 8 posições para as 3 provas de Matemática

$\rightarrow$ escolha: $3!\,C_8^3 = 336$.

TOTAL: $3!\,C_8^3 \times 7! = 336 \times 5040 = 1.693.440$ modos.

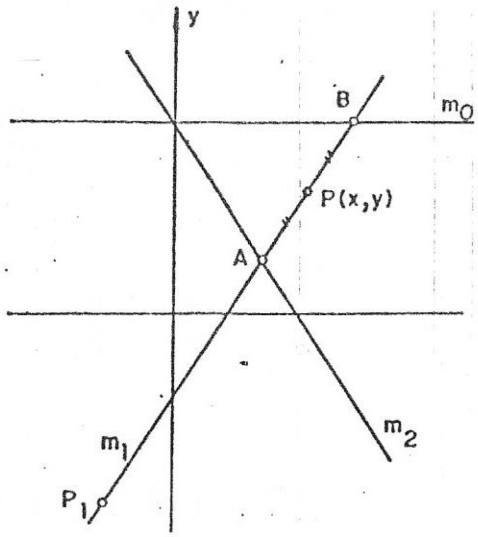
10a. QUESTÃO — VALOR: 1,0

Uma reta m_1 passa pelo ponto fixo P_1 (-1, -3) e intercepta a reta m_2 : $3x + 2y - 6 = 0$ no ponto A e a reta m_3: $y - 3 = 0$ no ponto B. Determinar a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento retilíneo AB à medida que a reta m_1 gira em torno do ponto P_1.

SOLUÇÃO

Equação de m_1:

$y+3 = m(x+1)$ .... (1)



Interseções:

(i) m_1 e m_2:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ y + 3 = m(x+1) \end{cases}$$

$$x_A = \frac{12-2m}{3+2m}$$

$$y_A = \frac{9m-9}{3+2m}$$

(ii) m_1 e m_3:

$$\begin{cases} y = 3 \\ y + 3 = m(x+1) \end{cases}$$

$$x_B = \frac{6-m}{m}$$

$$y_B = 3$$

P é ponto médio de AB →

$$\rightarrow y_p = \frac{1}{2}\left[\frac{9m-9}{3+2m} + 3\right] \rightarrow y_p = \frac{15m}{6+4m}$$

$$\rightarrow m = \frac{6y}{15-4y}$$

Como $P \in m_1$ → $m = \frac{y+3}{x+1}$

Logo: $\frac{6y}{15-4y} = \frac{y+3}{x+1}$ → $6xy + 4y^2 + 3y - 45 = 0$

$B^2 - AC > 0$ → Gênero Hipérbole