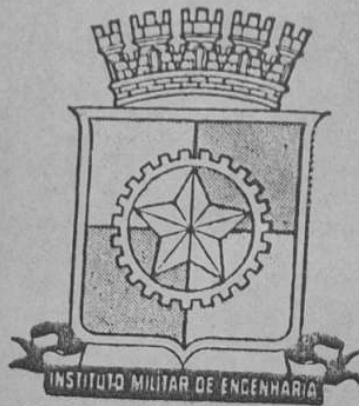


MINISTÉRIO DO EXÉRCITO
DEP – CTE_x
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA



ÁLGEBRA, ANÁLISE E
GEOMETRIA ANALÍTICA

1.º ANO

1982/1983

IME

MINISTÉRIO DO EXÉRCITO
DEP — C T Ex
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

COMISSÃO DE EXAME DE ESCOLARIDADE

1982/83

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA DE ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA
ANALÍTICA

1. NÃO ASSINE A PROVA.
2. Utilize a caneta esferográfica fornecida pelo Grupo de Aplicação e Fiscalização. As figuras julgadas necessárias deverão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores.
3. O espaço destinado à solução de cada questão é suficiente. Portanto, não será considerada resolução fora do local especificamente designado.
4. Não será fornecido material suplementar. A prova fornecida contém 2 (duas) folhas de papel para rascunho, o qual poderá ser feito também no verso das folhas de questões. Note-se, no entanto, que o rascunho não será levado em conta, para efeito de correção.
5. A interpretação das questões faz parte da resolução. São vedadas perguntas ao Grupo de Aplicação e Fiscalização.
6. A prova está sob a forma de caderno. Não é permitido destacar suas folhas. Ao entregar a prova devolva todo o material recebido.
7. Esta prova contém, além da capa e da presente folha de instruções, 18 (dezoito) folhas numeradas de 1 (um) a 18 (dezoito).
8. O tempo para solução desta prova é 4 (quatro) horas.
9. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Seja sucinto, evitando divagações.

BOA SORTE

1^a QUESTÃO

VALOR: 1,0

Determine a equação, identificando a sua natureza, do lugar geométrico de um ponto que se desloca de tal forma que o quadrado de sua distância ao ponto $(1,1)$ é proporcional à sua distância à reta $x + y = 0$

SOLUÇÃOSOLUÇÃO

2^a QUESTÃO

VALOR: 1,0

Dada a equação $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$, onde $m \in \mathbb{R}$:

(Valor 0,3)

- a) determine m tal que uma raiz seja nula;
calcule a outra raiz.

SOLUÇÃO

2^a QUESTÃO

(Continuação)

(Valor 0,3)

b) mostre que a equação dada tem sempre duas raízes distintas.

SOLUÇÃO

2^a QUESTÃO

(Continuação)

(Valor 0,4)

- c) determine m para que uma raiz seja inferior a 1 e a outra seja superior a 1.

SOLUÇÃO

(Valor 0,4)

- a) mostre que $f(1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

SOLUÇÃO

3ª QUESTÃO

VALOR: 1,0

Seja F o conjunto das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} que satisfazem
 $f(xy) = f(x) + f(y)$. Dados $f \in F$ e $a \in \mathbb{R}$ define-se a função
 $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_a(x) = f(ax) - f(x)$.

(Valor 0,4)

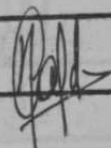
a) mostre que $f(1) = 0$, $\forall f \in F$.SOLUÇÃOSOLUÇÃO

3^a QUESTÃO

(Continuação)

- (Valor 0,6) b) mostre que $\forall a \in \mathbb{R}$, g_a é função constante.
(Sugestão: para o item b, desenvolver $g_a(xy)$ e leve em conta o item a).

SOLUÇÃO

4^a QUESTÃO

VALOR: 1,0

Determine o polinômio $p(x)$ do 4^o grau, sabendo que $p''(x) = ax^2 + bx + c$ e que $p(x)$ é divisível por $p''(x)$.

SOLUÇÃOSOLUÇÃO

5ª QUESTÃO

VALOR: 1,0

Dada a função $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$:

(Valor 0,6) a) estude a sua variação quanto a: continuidade, crescimento, assíntota e pontos notáveis, inclusive o ponto em que a curva corta a assíntota.

SOLUÇÃO

5^a QUESTÃO

(Continuação)

(Valor 0,4) b) faça o esboço gráfico da curva representativa da função.

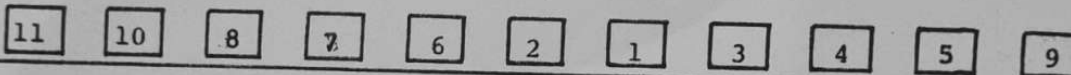
(Sugestão: para determinação da assíntota é conveniente colocar x em evidência para fora do radical e desenvolver a função pelo binômio de Newton).

SOLUÇÃO

11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

SOLUÇÃO

Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N , devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira? A figura abaixo mostra uma das disposições possíveis.



SOLUÇÃO

6^a QUESTÃO

(Continuação)

Considere a função f definida nos reais por

$$f(x) = (x - 1) \ln |x - 1| - x \ln x.$$

(Valor 0,5) a) dê seu domínio e calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.SOLUÇÃO

7^a QUESTÃO

VALOR: 1,0

Considere a função f definida nos reais por
 $f(x) = (x - 1) \ln |x - 1| - x \ln x$:

(Valor 0,5) a) dê seu domínio e calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

verifique se g é cont. SOLUÇÃO $x = 1$ e se é derivável
neste ponto.

SOLUÇÃO

7ª QUESTÃO

(Continuação)

(Valor 0,5) b) dada a função g definida nos reais por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \notin \{0,1\} \\ 0 & , \text{ se } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

verifique se g é contínua em $x = 1$ e se é derivável neste ponto.

SOLUÇÃO

Seja um determinante definido por $\Delta_1 = |1|$ e

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(Valor 0,5) a) pede-se a fórmula de recorrência (isto é, a relação entre Δ_n e Δ_{n-1}).

SOLUÇÃO

8ª QUESTÃO

(Continuação)

(Valor 0,5) b) calcule a expressão de Δ_n em função de n .

SOLUÇÃO

SOLUÇÃO

9ª QUESTÃO

VALOR: 1,0

Seja m um inteiro positivo. Define-se uma relação θ_m por

$$R_{\theta_m} = \{(i, j) \mid i = j + km, k \text{ inteiro}\}.$$

Mostre que θ_m é uma relação de equivalência.

SOLUÇÃO

$$a_1 = 12,5 (\sqrt{3} + 1)$$

$$a_2 = \frac{1}{1 - \sqrt{3}}$$

Calcule o $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

SOLUÇÃO

10^a QUESTÃO

VALOR: 1,0

Seja

$$S_n = \sum_{1}^n a_n$$

onde os a_n são complexos. Os módulos dos a_n estão em progressão geométrica. Os argumentos dos a_n estão em progressão aritmética. São dados:

$$a_1 = 13,5 (\sqrt{3} + i)$$
$$a_4 = \frac{i\sqrt{3} - 1}{2}$$

Calcule o $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

SOLUÇÃO



10^a QUESTÃO

(Continuação)