1ª QUESTÃO Valor: 1,0

Determine a equação, identificando a sua natureza, do lugar geométrico de um ponto que se desloca de tal forma que o quadrado de sua distância ao ponto (1,1) é proporcional à sua distância à reta x+y=0.

SOLUÇÃO

Distância ao ponto: $d_1 = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ $\qquad d^2 = (x-1)^2+(y-1)^2$

Distância à reta : $d_2 = \dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1 = K\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{K\sqrt{2}\,(x+y)}{2}$$

$$x^2-2x - \frac{K\sqrt{2}}{2}x + y^2-2y - \frac{K\sqrt{2}}{2}y = -2$$

$$x^2-(2 + \frac{K\sqrt{2}}{2})x + y^2-(2 + \frac{K\sqrt{2}}{2})y = -2$$

$$x^2-2(1 + \frac{K\sqrt{2}}{4})x + y^2-2(1 + \frac{K\sqrt{2}}{4})y = -2$$

$$[x-(1 + \frac{K\sqrt{2}}{4})]^2 + [y-(1 + \frac{K\sqrt{2}}{4})]^2 = -2+2(1 + \frac{K\sqrt{2}}{4})^2$$

$$= K\sqrt{2} + \frac{K^2}{4} = K(\sqrt{2} + \frac{K}{4})$$

Equação de um círculo com centro no ponto

$(1 + \frac{K\sqrt{2}}{4}\ ;\ 1 + \frac{K\sqrt{2}}{4})$ e raio $r = K(\sqrt{2} + \frac{K}{4})$

Se K=0 ou $K= -4\sqrt{2}$, o lugar se reduz a um ponto (1,1) ou (-1,-1).

2ª QUESTÃO Valor: 1,0

Dada a equação $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$, onde $m \in \mathbb{R}$:

a) determine m tal que uma raiz seja nula, calcule a outra raiz.

SOLUÇÃO

Para que uma raiz seja nula devemos ter f(0)=0

$-3m-2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \dfrac{-2}{3}$

substituindo o valor de m na equação, temos:

$$\frac{-4x^2}{3} - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x(-4x-6) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-3}{2}$$

b) mostre que a equação dada tem sempre duas raízes distintas.

SOLUÇÃO

O discriminante da equação é

$\Delta = 4-4(2m)(-3m-2) = 4(1+6m^2+4m)$

$6m^2+4m+1$ é um trinômio do 2º grau em m. Não existe valor de m que anule o trinômio e ele é positivo qualquer que seja m. Portanto o discriminante é positivo para todo m e a equação tem raízes distintas.

c) determine m para que uma raiz seja inferior a 1 e a outra seja superior a 1.

SOLUÇÃO

Sendo x_1 e x_2 as raízes, teremos a condição

$x_1<1<x_2$ e portanto

$mf(1)<0$ ou $m(-m-4)<0 \rightarrow m(m+4)>0$

logo m deve ser exterior ao intervalo $]-4,0[$, ou seja,

$-\infty<m<-4$ ou $0<m<\infty$

3ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Seja F o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que satisfazem $f(xy) = f(x) + f(y)$. Dados $f \in F$ e $a \in \mathbb{R}$ define-se a função $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_a(x) = f(ax) - f(x)$.

a) mostre que $f(1) = 0$, $\forall f \in F$.

SOLUÇÃO

De $f(xy) = f(x) + f(y)$ temos, fazendo $x=y=1$

$f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 2f(1)$

portanto $f(1) = 0$, $\forall f \in F$

b) mostre que $\forall a \in \mathbb{R}$, g_a é função constante.
(Sugestão: para o item b, desenvolver $g_a(xy)$ e levem em conta o item a).

SOLUÇÃO

$$g_a(xy) = f(axy) - f(xy) = f((ax)y) - f(xy) =$$
$$= f(ax) + f(y) - f(x) - f(y) =$$
$$= f(ax) - f(x) = g_a(x) \rightarrow g_a(xy) = g_a(x) \quad \forall x,y$$

Analogamente, temos:

$g_a(xy) = f(axy) - f(xy) = f((ay)x) - f(xy) =$

$= f(ay) + f(x) - f(x) - f(y) =$

$= f/ay) - f(y) = g_a(y) \rightarrow \quad g_a(xy) = g_a(y) \quad \forall x,y$

Temos $\forall x \in \mathbb{R}$ que:

$g_a(x) = g_a(x.1) = g_a(1)$

$g_a(1) = f(a) - f(1) = f(a) \quad$ pois $\quad f(1) = 0$

Portanto $\quad g_a(x) = f(a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

ou seja, g_a é função constante.

4ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Determine o polinômio $p(x)$ do 4º grau, sabendo que $p''(x) = ax^2+bx+c$ e que $p(x)$ é divisível por $p''(x)$.

SOLUÇÃO

O polinômio $p(x)$ será necessariamente da forma

$p(x) = (ax^2+bx+c)(rx^2+sx+t)$ com r,s,t a determinar de tal maneira que a derivada segunda seja igual a ax^2+bx+c.

Derivando $p(x)$ temos

$p''(x) = 2a(rx^2+sx+t) + 2r(ax^2+bx+c) + 2(2ax+b)(2rx+s)$

Igualando-se $p''(x)$ a ax^2+bx+c temos:

$12\,arx^2 + 6(as+br)x + 2(at+bs+cr) = ax^2+bx+c$

$12\,ar = a \rightarrow r = \frac{1}{12}$

$6(as+br) = b \rightarrow 6(as + \frac{b}{12}) = b \rightarrow \quad s = \frac{b}{12a}$

$2(at+bs+cr) = c \rightarrow 2(at + \frac{b^2}{12a} + \frac{c}{12}) = c \rightarrow \quad t = \frac{5ac-b^2}{12a^2}$

Substituindo em $p(x)$ vem:

$$p(x) = \frac{1}{12a^2}(ax^2+bx+c)(a^2x^2+abx+5ac-b^2)$$

$$= \frac{1}{12a^2}(a^3x^4+2a^2bx^3+6a^2cx^2+b(6ac-b^2)x + c(5ac-b^2)).$$

5ª QUESTÃO Valor: 1,0

Dada a função y : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$:

a) estude a sua variação quanto à: continuidade, crescimento, assíntota e pontos notáveis, inclusive o ponto em que a curva corta a assíntota.

SOLUÇÃO

A função pode ser escrita sob a forma $y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$

O fator $(x+2)^2$ é positivo ou nulo, logo a função toma o sinal de $(x-1)$: ela é negativa para $x<1$ e positiva para $x>1$.

Derivando, temos:

$$y' = \frac{1}{3[(x-1)(x+2)^2]^{2/3}} \cdot (3x^2+6x) = \frac{3x(x+2)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)^4}} = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$$

A derivada se anula somente para $x=0$ e portanto teremos um mínimo no ponto

$x=0 \quad y = \sqrt[3]{-2^2} = \sqrt[3]{-4}$ mínimo: $(0, \sqrt[3]{-4})$

pois y é negativo neste ponto e se anula de um lado e de outro em $x=-2$ e $x=1$.

Em $x=-2$ e $x=1$ a derivada não existe ($y'=\infty$) e a tangente à curva é paralela ao eixo dos y nos dois pontos.

Em $x=-2$ a função se anula sem mudar de sinal; a curva vem de baixo para o alto, toca o eixo dos x e volta para baixo:

$x=-2 \rightarrow$ ponto de retrocesso

Em $x=1$ a função muda de sinal e a curva atravessa o eixo dos x assim como a tangente; temos então um ponto de inflexão:

$x=1 \rightarrow$ ponto de inflexão

Determinação da assíntota:

$$y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2} = x\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}} = x\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right)^{1/3}$$

b) faça o esboço gráfico da curva representativa da função. (Sugestão: para determinação da assíntota é conveniente colocar x em evidência para fora do radical e desenvolver a função pelo binômio de Newton).

SOLUÇÃO

Desenvolvendo pelo binômio de Newton, vem

$$\left(1 + \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right)\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{1.2}\left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right)^2 + \ldots$$

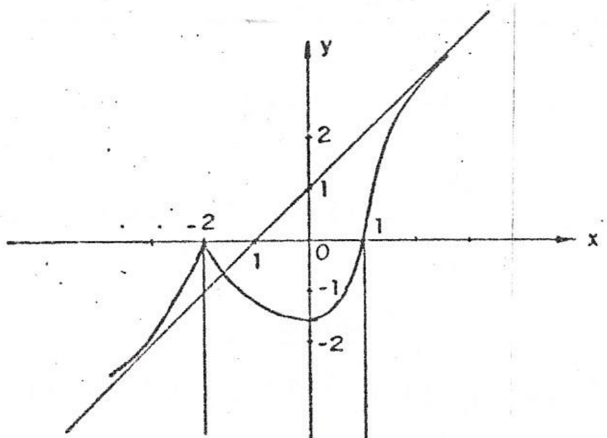
$$x.\left(1 + \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right)\right)^{1/3} = x + \frac{x}{3}\left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) - \frac{x}{9}\left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right)^2 + \ldots$$

o termo do 1º grau é x; o termo constante é $\frac{x}{3} . \frac{3}{x} = 1$; todos os outros termos tendem para zero quando x cresce indefinidamente; logo a equação da assíntota é $y = x+1$

equação da curva: $\sqrt[3]{x^3+3x^2-4} \rightarrow (x+1)^3 = x^3+3x^2-4$

$x^3+3x^2+3x+1 = x^3+3x^2-4 \rightarrow 3x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{3}$ $\qquad y = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$

ponto em que a curva corta a assíntota $(-5/3, -\frac{2}{3})$



6ª QUESTÃO

Valor: 1,0

Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N, devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira? A figura abaixo mostra uma das disposições possíveis.

11	10	8	7	6	2	1	3	4	5	9

SOLUÇÃO

Supõe-se o carro 1 estacionado na vaga de ordem i (i=1,2,...,N); as i-1 vagas que antecedem esta i-ésima deverão ser ocupadas por i-1 carros dentre os de nºs 2,3,4,...,N.

O nº de modos de preencher as i-1 vagas anteriores à vaga em que o carro nº 1 estacionou é o dos grafos de nºs escolhidos dentre os nºs 2,3, 4,...N em ordem de valor crescente, ou seja, C_{n-1}^{i-1}. Uma vez preenchidas as <u>i</u> primeiras vagas, o preenchimento das vagas i+1,i+2,...,N só poderá ser feito de um modo.

O nº total de configurações será:

$$\sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1}$$

Pelo binômio de Newton, $(x+a)^m = \sum_{h=0}^{m} C_m^h \, a^h x^{m-h}$ com x=a=1, h=i-1 e m=n-1

$$\sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} = 2^{n-1}$$

7ª QUESTÃO Valor: 1,0

Considere a função f definida nos reais por

$f(x) = (x-1)\ \ell n\,|x-1| - x\ \ell n\ x$:

a) dê seu domínio e calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

SOLUÇÃO

A expressão $f(x) = (x-1)\ \ell n\,|x-1| - x\ \ell n\ x$ está definida para

$|x-1| \neq 0$ e $x > 0$

donde temos para que $|x-1| \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \quad x > 0$

O domínio será $D =]0,1[\cup]1,\infty[$

Podemos escrever a função sob a forma

$f(x) = x[\ell n|x-1| - \ell n\ x] - \ell n|x-1|$

Para valores grandes de $x\ (x\to\infty)$ temos $|x-1| = x-1$

$f(x) = x[\ell n(x-1) - \ell n\ x] - \ell n(x-1)$

$\quad = x\ \ell n(1 - \frac{1}{x}) - \ell n(x-1)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} [x\ \ell n(1 - \frac{1}{x}) - \ell n(x-1)]$

$x\ \ell n(1 - \frac{1}{x}) = - \dfrac{\ell n(1 - \frac{1}{x}) - \ell n\ 1}{-\frac{1}{x}}$ e o limite quando $x\to\infty$ desta expressão

é igual a -1, derivada de $\ell n\ n$ para n=1; $\lim\limits_{x\to\infty} \ell n(x-1) = \infty$

Daí $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1-\infty = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

b) dada a função g definida nos reais por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \notin \{0,1\} \\ 0 & , \text{ se } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

verifique se g é contínua em x=1 e se é derivável neste ponto.

SOLUÇÃO

Como $g(1)=0$ e $g(x)=f(x)$ em uma vizinhança de $x=1$ resulta que g é contínua em 1, pois

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0 = g(1)$$

Seja $x = 1+h$, com $1+h>0$

Tem-se $g(1+h) = h\,\ell n|h| - (1+h)\,\ell n(1+h)$

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \ell n|h| - \lim_{h\to 0} (1+h), \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ell n(1+h)-\ell n\ 1}{h}$$

$$= -\infty - 1.1 = -\infty$$

daí a função g não é diferencial em x=1.

8ª QUESTÃO Valor: 1,0

Seja um determinante definido por $\Delta_1 = |1|$ e

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \ldots\ldots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) pede-se a fórmula de recorrência (isto é, a relação entre Δ_n e Δ_{n-1}).

SOLUÇÃO

Podendo resolver o determinante em relação à 1ª coluna daí

$$\Delta_n = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} =$$

$$= 2^{n-1} + \Delta_{n-1}$$

i. é

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2^{n-1}$$

é a fórmual pedida.

Obs: 2ª Solução: $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} + 1$

b) calcule a expressão de Δ_n em função de n.

SOLUÇÃO

Podemos ver que

$$\Delta_{n-1} = 2^{n-2} + \Delta_{n-2}$$

$$\Delta_{n-2} = 2^{n-3} + \Delta_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_2 = 2^{\cancel{1}} + \Delta_1 = 2+1$$

daí

$$\Delta_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1$$

9ª QUESTÃO Valor: 1,0

Seja m um inteiro positivo. Define-se uma relação Θ_m por

$$R_{\Theta_m} = \{(i,j) \mid i = j + km,\ k \text{ inteiro}\}.$$

Mostre que Θ_m é uma relação de equivalência.

SOLUÇÃO

Uma relação de equivalência tem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

a) Θ_m é reflexiva

para K=0 temos i=j donde (i,i) e (j,j) $\varepsilon\ \Theta_m$, logo Θ_m é reflexiva.

b) Θ_m é simétrica

Condição: se (i,j) $\varepsilon\ \Theta_m$ então (j,i) $\varepsilon\ \Theta_m$.

Para que o par (j,i) pertença a Θ_m ele tem que satisfazer a definição, ou seja, (j,i) | j=i+km ou seja (j,i) | i=j-km

o que satisfaz a definição para K=-1.

c) Θ_m é transitiva

Condição: se (i,j) $\varepsilon\ \Theta_m$ e (j,z) $\varepsilon\ \Theta_m$ então (i,z) $\varepsilon\ \Theta_m$

Como (j,z) pertence a Θ_m ele tem que satisfazer a condição, ou seja

$(j,z) \mid j=z+km$ donde $z=j-km$

Teremos assim um par ordenado (i,z) onde $z=j-km$

Para que (i,z) pertença a Θ_m ele tem que satisfazer a definição, o que se verifica para $K=-1$ ou, de outro modo:

$$(i,z) \mid i=z+K'm = (j-km) + K'm = j + (K'-K)m$$

$$= j + K''m$$

Com K" inteiro, o que satisfaz a definição.

Logo, Θ_m é relação de equivalência.

10ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Seja

$$S_n = \sum_1^n a_n,$$

onde os a_n são complexos. Os módulos dos a_n estão em progressão geométrica. Os argumentos dos a_n estão em progressão aritmética. São dados:

$$a_1 = 13,5\ (\sqrt{3} + i)$$

$$a_4 = \frac{i\sqrt{3} - 1}{2}$$

Calcule o $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

SOLUÇÃO

Os termos da série de complexos serão os de uma PG onde $\underline{r}$ é a razão da PG dos módulos e $\underline{\alpha}$ é a razão da PA dos argumentos

$$q=r(\cos\alpha + 1\ \text{sen}\ \alpha) \qquad (1)$$

$$a_1 = 13,5(\sqrt{3}+i) \rightarrow \begin{cases} \rho_1 = 13,5\sqrt{3+1} = 27 \\ \Theta_1 = \text{arc tg}\ \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ \end{cases} \qquad a_4 = \frac{i\sqrt{3}-1}{2} \rightarrow \begin{cases} \rho_4 = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1 \\ \Theta_4 = \text{arc tg}(-\sqrt{3}) = 120^\circ \end{cases}$$

Como os módulos estão em PG de razão $\underline{r}$, temos

$$\rho_4 = \rho_1 r^3 \qquad r = \sqrt[3]{\frac{\rho_4}{\rho_1}} = \sqrt[3]{\frac{7}{27}} = \frac{1}{3}$$

Como os argumentos estão em PA de razão α, temos

$$\Theta_4 = \Theta_1 + 3\alpha \qquad = \frac{\Theta_4 - \Theta_1}{3} = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$$

Substituindo em (1), vem:

$$q = \frac{1}{3}\ (\cos 30^\circ + i\ \text{sen}\ 30^\circ) = \frac{1}{3}\ (\frac{\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3} + i}{6}$$

Como r<1 a PG é decrescente e teremos para soma

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{13,5(\sqrt{3}+i)}{1 - \frac{\sqrt{3}+i}{6}} = \frac{81(\sqrt{3}+i)}{6-\sqrt{3}-i}$$

$$a_1 = 27\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 27\,cis\,\pi/6$$

$$a_4 = \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = cis\,2\pi/3$$

$$\frac{a_4}{a_1} = q^3 = \frac{1}{27}\,cis\left(2\pi/3 - \pi/6\right) = \frac{1}{27}\,cis\,\frac{\pi}{2}$$

$$\to S = \frac{27\,cis\,\pi/6}{1 - \frac{1}{3}\,cis\,\frac{\pi}{6}} = \frac{81(\sqrt{3}+i)}{6-\sqrt{3}-i}$$