IME 1984 – ÁLGEBRA

IME – ÁLGEBRA – 1983/1984 – ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA

JS 15/12/83 (p. 14), 16/12/83 (p. 14), 26/12/83 (p. 13)

1a. QUESTÃO **VALOR: 1,0**

Seja $\log a$ o logaritmo decimal de a e $\log_3 a$ o logaritmo de a na base 3. São dados:

$\log 2 = \alpha$ e $\log 3 = \beta$

Calcule em função de α e β os valores de

$\log N$ e $\log_3 N$

onde $N = 243\sqrt[4]{\dfrac{364,5}{\sqrt[3]{2}}}$

SOLUÇÃO

$$\log N = \log 243 + \frac{1}{4}\left[\log 364,5 - \log 2^{1/3}\right] =$$

$$= \log 3^5 + 1/4 \log \frac{729}{2} - 1/4 \log 2^{1/3} =$$

$$= 5 \log 3 + 1/4 \log 729 - 1/4 \log 2 - 1/12 \log 2 =$$

$$= 5 \log 3 + 1/4 \cdot 6 \log 3 - 1/3 \log 2 =$$

$$= 13/2 \log 3 - 1/3 \log 2 \qquad \boxed{\log N = 13/2\ \beta - 1/3\ \alpha}$$

$$\log_3 N = \frac{\log N}{\log 3} = \frac{13/2\ \beta - 1/3\ \alpha}{\beta} = 13/2 - 1/3\ \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\boxed{\log_3 N = 13/2 - \frac{\alpha}{3\beta}}$$

2a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Determine o polinômio

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ , tal que}$$

$p(x) = p(1-x)$, $p(0) = 0$ e $p(-1) = 6$.

SOLUÇÃO

$p(0) = d = 0$ $\boxed{d = 0}$

$p(-1) = 1 - a + b - c + d = 6$ $b - a - c = 5$

$$\begin{aligned} p(1-x) &= 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 + a - 3ax + 3ax^2 - ax^3 + b - 2bx + \\ &\quad + bx^2 + c - cx + d = \\ &= x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d. \end{aligned}$$

$$(1 + a + b + c) + (-4 - 3a - 2b - 2c)x + (6 + 3a)x^2 + (-4 - 2a) = 0$$

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ -4 - 3a - 2b - 2c = 0 \\ 6 + 3a = 0 \\ -4 - 2a = 0 \end{cases} \qquad \boxed{a = -2}$$

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ b - c = 3 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} b = 2 \\ c = -1 \end{array}}$$

$$\boxed{p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x}$$

3a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Quais as relações entre os coeficientes reais a,b,c,d da equação

$$x^2 + 2(a + ib)x + c + id = 0$$

de modo que ela seja satisfeita para um valor real $x = k$?

Notação: $i^2 = -1$

SOLUÇÃO

$$k^2 + 2(a + ib)k + c + id = 0$$

$$\begin{cases} k^2 + 2ak + c = 0 \\ 2bk + d = 0 \end{cases}$$

Se $b \neq 0$, $k = -\frac{d}{2b}$ e $\frac{d^2}{4b^2} - \frac{ad}{b} + c = 0$,

ou seja, $d^2 - 4abd + 4b^2c = 0$.

Se $b = 0$, então $d = 0$ e $a^2 \geq c$.

RESPOSTA:

Se $b \neq 0$, $d^2 - 4abd + 4b^2c = 0$.

Se $b = 0$, $d = 0$ e $a^2 \geq c$.

4a. QUESTÃO **VALOR: 1,0**

Determine os valores de m para os quais as quatro raízes da equação biquadrada

$$x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$$

sejam reais e estejam em progressão aritmética.

SOLUÇÃO

As raízes são $-\beta, -\alpha, \alpha, \beta$ onde

$\alpha^2 - \beta^2 = 3m + 5$ e $\alpha^2 \times \beta^2 = (m + 1)^2$

Estarão em P.A. se e só se $-\alpha + \beta = 2\alpha = \beta - \alpha$, isto é, $\beta = 3\alpha$.

Daí, $\begin{cases} 10\alpha^2 = 3m + 5 \\ 9\alpha^4 = (m + 1)^2 \end{cases}$

$$9(3m + 5)^2 = 100(m + 1)^2$$

$$3(3m + 5) = \pm 10(m + 1)$$

$$9m + 15 = \pm(10m + 10)$$

$$m_1 = -25/19 \qquad m_2 = 5$$

Para $m = -25/19$ a equação é $x^4 - 10/19\,x^2 + 36/361 = 0$, cujas raízes são reais.

Para $m = 5$, a equação é $x^4 - 20x^2 + 36 = 0$, cujas raízes são reais.

Resposta: $m = 5$ ou $m = -25/19$.

3a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Determine a soma de todos os números inteiros que são obtidos permutando-se, sem repetição, os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

SOLUÇÃO

São 5! = 120 permutações. Juntando cada permutação com a que dela se obtém trocando de posição o 2 e o 4 e também o 1 e o 5, obteremos 60 casais de soma 66 666.

A resposta é 60 x 66 666 = 3.999.960.

6a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja o desenvolvimento

$$\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)^n$$

onde n é um inteiro positivo. Determine n sabendo-se que o maior dos coeficientes é o do termo em x^{n-9}.

SOLUÇÃO

T'_p = coeficiente de T_p.

$$\frac{T'_{p+1}}{T'_p} = \frac{n-p+1}{p} \cdot \frac{2/5}{1/5} = \frac{2n-2p+2}{p}$$

$$T'_{p+1} < T'_p \iff p > \frac{2n+2}{3}$$

$$T'_{p+1} > T'_p \iff p < \frac{2n+2}{3}$$

Devemos ter o coeficiente de T_{10} máximo; para isso é necessário e suficiente que $T'_9 \leq T'_{10}$ e $T'_{10} \geq T'_{11}$

$$9 \leq \frac{2n+2}{3} \quad \text{e} \quad 10 \geq \frac{2n+2}{3}$$

$$12{,}5 \leq n \quad \text{e} \quad n \leq 14.$$

$\boxed{\text{n pode ser igual a 13 ou 14}}$

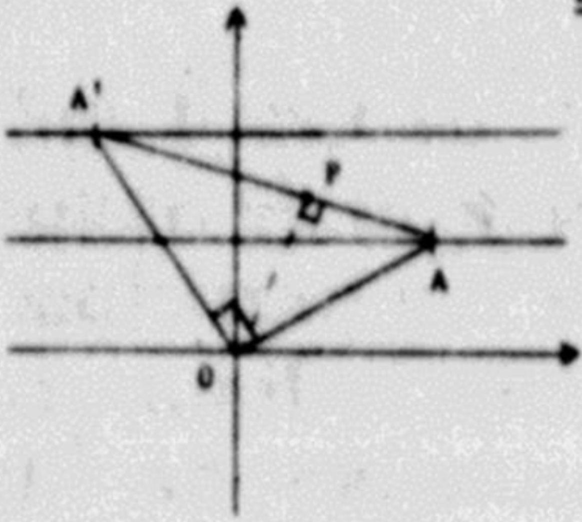
IME - CLE 83/84	ÁLGEBRA		FOLHA 8

7a. QUESTÃO — VALOR: 1,0

São dadas duas retas paralelas r e r' e um ponto O. Determine o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de O aos segmentos de reta AA', vistos de O sob um ângulo reto e tais que A pertence a r e A' pertence a r'. Sabe-se que:

distância de O a r : d
distância de O a r': p
distância de r a r': p−d

SOLUÇÃO



r': $y = p$

r: $y = d$

A (α, d)

$$A' \begin{cases} y = p \\ y = \dfrac{-\alpha}{d}\,x \end{cases}$$

$$A' \left(\frac{-pd}{\alpha},\ p\right).$$

$$AA' : y - d = \frac{(d - p)\,\alpha}{\alpha^2 + pd}\,(x - \alpha) \qquad (1)$$

$$OP : y = -\frac{\alpha^2 + pd}{(d - p)\alpha}\,x \qquad (2)$$

Eliminando α entre (1) e (2) obtemos: $x^2 + y^2 - (p + d)\,y + pd = 0$

círculo de centro $\left(0, \dfrac{p + d}{2}\right)$ e raio $\dfrac{p - d}{2}$.

O lugar é um círculo cujo diâmetro é a distância de r a r' e cujo centro é o ponto médio do segmento da perpendicular comum a r e r' por O.

IME - CEE 83/84 | ÁLGEBRA | | FOLHA 10

8a. QUESTÃO (ITEM A) VALOR: 0,6

Dada a função definida nos reais por

$$y = e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

a) estude a sua variação quanto a: continuidade e possível simetria de sua representação, crescimento ou decrescimento, extremos, inflexões e assíntotas.

SOLUÇÃO

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$\lim_{x \to 1^+} y = \infty$ $\qquad \lim_{x \to 1^-} y = 0$ $\qquad \lim_{x \to -1^+} y = 0$ $\qquad \lim_{x \to -1^-} y = \infty$

descontínua em $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$.

A função é par. Logo seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to -\infty} y = e$$

As retas $y = e$, $x = 1$, $x = -1$ são assíntotas ao gráfico

$$y' = e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}} \cdot \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & + & & + & & - & & - & \\ \hline & & -1 & & 0 & & 1 & & \end{array}$$

Estritamente crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(-1, 0]$.

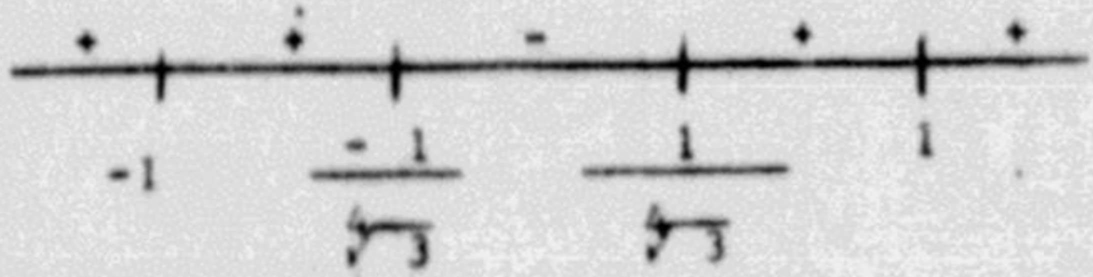
Estritamente decrescente em $[0, 1)$ e em $(1, \infty)$.

Máximo local em $(0, 1)$.

IME - CEE 83/84 | ÁLGEBRA | FOLHA 11

8a. QUESTÃO (ITEM A) (Continuação)

$$y'' = e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}} \cdot 2\,\frac{3x^4 - 1}{(x^2 - 1)^4}$$



Pontos de inflexão:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\ e^{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\right)$$

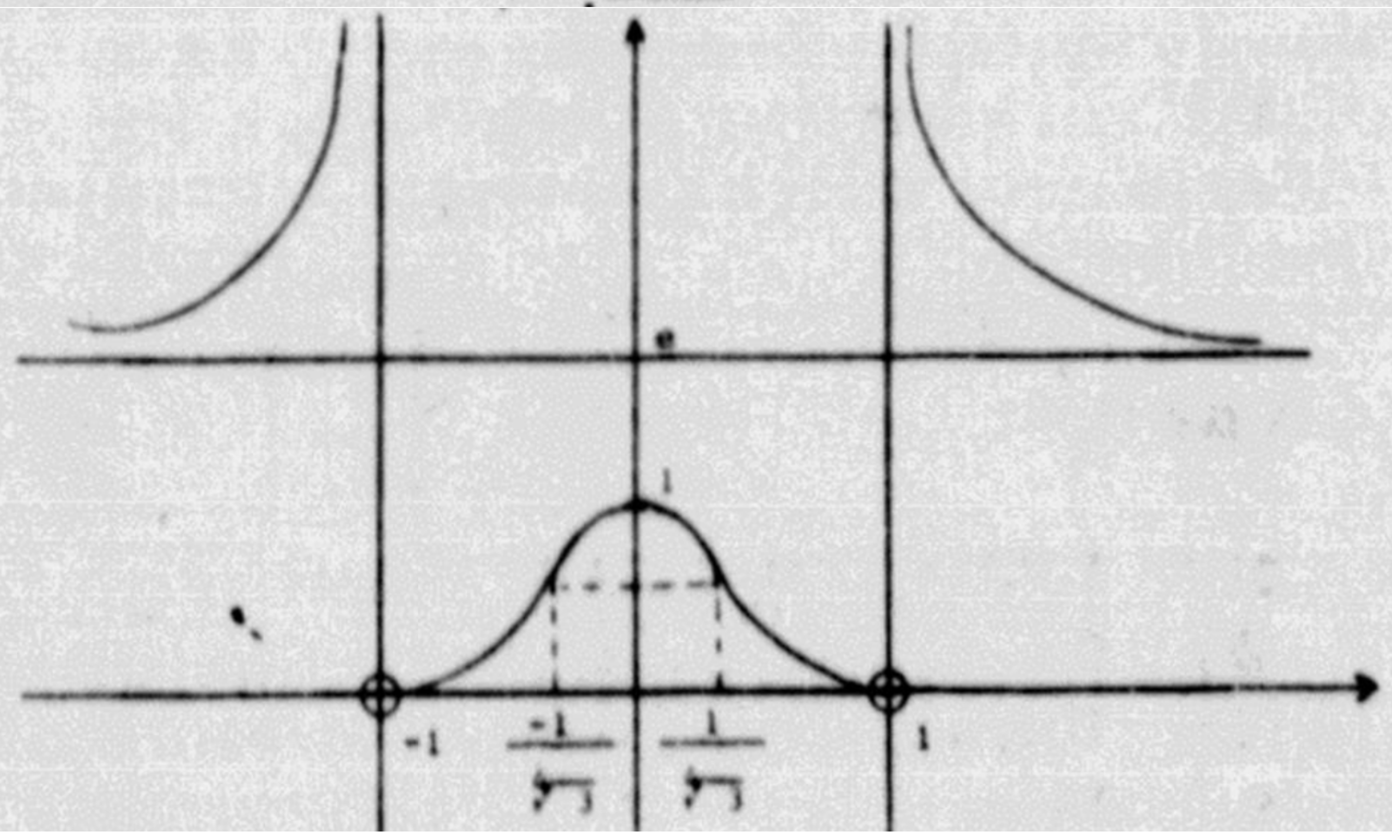
$$\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},\ e^{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\right).$$

IME - CEE 83/84 | ÁLGEBRA | FOLHA 12

8a. QUESTÃO (ITEM B) VALOR: 0,4

b) faça o esboço gráfico da curva representativa da função.

SOLUÇÃO



IME - CEE 83/84	ÁLGEBRA		FOLHA 13

9a. QUESTÃO — **VALOR: 1,0**

Seja D o determinante da matriz $A = \left[a_{ij}\right]$ de ordem n, tal que $a_{ij} = |i-j|$. Mostre que:

$$D = (-1)^{n-1}.(n-1).2^{n-2}$$

SOLUÇÃO

Mantendo a primeira coluna e subtraindo de cada uma das outras colunas a coluna anterior obtemos

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ & & & & \\ n-2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Repetindo a operação anterior,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ n-2 & -(n-1) & 0 & 0 & 2 \\ n-1 & -n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo pela 1ª linha,

$$D = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ n-3 & -n-1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ n-2 & -n-1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ n-1 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo pela última linha,

$$D = (-1) \, . \, (n-1) \, (-1)^{n} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} \, (n-1) \, 2^{n-2} = (-1)^{n-1} \, (n-1) \, 2^{n-2}$$

10ª. QUESTÃO **VALOR: 1,0**

Dada a matriz $M = (m_{ij})$

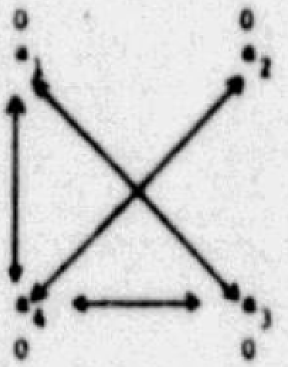
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, define-se em A uma relação R por:

$a_i \, R \, a_j \Leftrightarrow m_{ij} = 1$

Verifique se R é uma relação de equivalência.

SOLUÇÃO



Não, pois R não é transitiva.

Com efeito $a_3 \, R \, a_4$ (pois $m_{34} = 1$) e $a_4 \, R \, a_2$ (pois $m_{42} = 1$) e não é verdade que $a_3 \, R \, a_2$ (pois $m_{32} \neq 1$).