1a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja log a o logaritmo decimal de a e $\log_3 a$ o logaritmo de a na base 3. São dados:

$\log 2 = \alpha$ e $\log 3 = \beta$

Calcule em função de α e β os valores de

$\log N$ e $\log_3 N$

onde $N = 243 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{364{,}5}{\sqrt[3]{2}}}$

$$364{,}5 = \frac{729}{2} = \frac{3^6}{2}$$

$$\text{logo } N = 3^5 \cdot \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\sqrt[3]{2}}} = \frac{3^{13/2}}{2^{1/3}}$$

$$\text{assim: } \log N = \log\left[\frac{3^{13/2}}{2^{1/3}}\right] \Longrightarrow \boxed{\log N = \frac{13}{2}\,\beta - \frac{1}{3}\,\alpha}$$

$$\log_3 N = \frac{\log N}{\log 3} = \frac{\frac{13}{2}\,\beta - \frac{1}{3}\,\alpha}{\beta} \Longrightarrow \boxed{\log_3 N = \frac{13}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$$

2a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Determine o polinômio

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{tal que}$$

$p(x) = p(1-x)$, $p(0) = 0$ e $p(-1) = 6$.

SOLUÇÃO

$P(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{d = 0}$

$P(-1) = 6 \Longrightarrow 1 - a + b - c = 6 \Longrightarrow \boxed{-a + b - c = 5}$ (*)

$P(1-x) = (1-x)^4 + a(1-x)^3 + b(x-1)^2 - c(x-1) =$

$\quad = (x-1)^4 - a(x-1)^3 + b(x-1)^2 - c(x-1) = p(x)$

mas determinando-se os coeficientes do desenvolvimento de p(x) segundo as potências de $(x-1)$, temos:

	1	a	b	c	0
1	1	a+1	a+b+1	a+b+c+1	a+b+c+1
1	1	a+2	2a+b+3	3a+2b+c+4	
1	1	a+3	3a+b+6		
1	1	a+4			
1	1				

logo: $a + 4 = -a \Longrightarrow \boxed{a = -2}$

$3a + \cancel{b} + 6 = \cancel{b}$

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 2b + c + 4 = -c \Longrightarrow b + c = 1 \\ a + b + c + 1 = 0 \\ \text{de } (*) \Longrightarrow b - c = 3 \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{|l} b = 2 \\ c = -1 \end{array}$$

finalmente:

$$\boxed{P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x}$$

3a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Quais as relações entre os coeficientes reais a,b,c,d, da equação

$$x^2 + 2\,(a + ib)\,x + c + id = 0$$

de modo que ela seja satisfeita para um valor real $x = k$?

Notação: $i^2 = -1$

SOLUÇÃO

$$k \text{ é raiz} \Longleftrightarrow k^2 + 2(a + ib)k + c + id = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} k^2 + 2ak + c = 0 \\ 2bk + d = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{-d}{2b} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{-d}{2b}\right)^2 + 2a\left(\frac{-d}{2b}\right) + c = 0$$

$$\Longrightarrow d^2 - 4abd + 4b^2c = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{d^2 + 4b^2c = 4abd}$$

4a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Determine os valores de m para os quais as quatros raízes da equação biquadrada

$$x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$$

sejam reais e estejam em progressão aritmética.

SOLUÇÃO

raízes: $-b, -a, a, b$

se estão em P.A., então $r = 2a = b - a \Longrightarrow \boxed{b = 3a}$

considerando-se a equação do 2º grau de raízes a^2 e $b^2 = 9a^2$

$$\Longrightarrow S = 3m + 5 = 10a^2 \Longrightarrow a^2 = \frac{3m + 5}{10}$$

$$P = (m + 1)^2 = 9a^4$$

$$\Longrightarrow 9 \cdot \left[\frac{3m + 5}{10}\right]^2 = (m + 1)^2$$

i) $\dfrac{3(3m + 5)}{10} = m + 1 \Longrightarrow 9m + 15 = 10m + 10 \Longrightarrow \boxed{m = 5}$

ii) $\dfrac{3(3m + 5)}{10} = -(m + 1) \Longrightarrow 9m + 15 = -10m - 10 \Longrightarrow \boxed{m = -\dfrac{25}{19}}$

5a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Determine a soma de todos os números inteiros que são obtidos permutando-se, sem repetição, os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

SOLUÇÃO

1ª SOLUÇÃO

- a cada número do conjunto das permutações, podemos associar o seu "simétrico" tal que a soma dos dois vale 66666;
- como podemos formar $\frac{5!}{2} = 60$ pares, temos:

$S = 60 \times 66666 \Longrightarrow \boxed{S = 3\ 999\ 960}$

2ª SOLUÇÃO

12345
12354
12534
⋮
(+)

- cada algarismo aparece $4! = 24$ vezes em cada posição dos números;
- assim:

$$S = 24 \times [1 + 2 + 3 + 4 + 5] \times [10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1] =$$

$$= 24 \times 15 \times 11\ 111 \Longrightarrow$$

$$\boxed{S = 3\ 999\ 960}$$

6a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja o desenvolvimento

$$\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)^n$$

onde n é um inteiro positivo. Determine n sabendo-se que o maior dos coeficientes é o do termo em x^{n-9}.

SOLUÇÃO

$$T_{k+1} = \frac{C_n^k\, 2^k}{5^n}\, x^{n-k}$$

CONDIÇÃO: $\begin{cases} \text{coeficiente } T_{k+1} \geq \text{coeficiente } T_k \\ \text{coeficiente } T_{k+1} \geq \text{coeficiente } T_{k+2} \end{cases}$

i) $C_n^k\, 2^k \geq C_n^{k-1}\, 2^{k-1} \iff \dfrac{n!\, 2^k}{(n-k)!\,k!} \geq \dfrac{n!\, 2^{k-1}}{(n-k)!\,k!} \iff \dfrac{2}{k} \geq \dfrac{1}{n-k+1} \iff$

+1 (k-1)!

$\iff 2n - 2k + 2 \geq k \iff \boxed{n \geq \dfrac{3k-2}{2}}$

ii) $C_n^k\, 2^k \geq C_n^{k+1}\, 2^{k+1} \iff \dfrac{n!\, 2^k}{(n-k)!\,k!} \geq \dfrac{n!\, 2^{k+1}}{(n-k-1)!\,(k+1)!} \iff \dfrac{1}{n-k} \geq \dfrac{2}{k+1} \implies$

$\implies k + 1 \geq 2n - 2k \iff \boxed{n \leq \dfrac{3k+1}{2}}$

Como o maior coeficiente aparece para k = 9, temos:

$\dfrac{25}{2} \leq n \leq 14$

Logo: $\boxed{n = 13 \text{ ou } n = 14}$

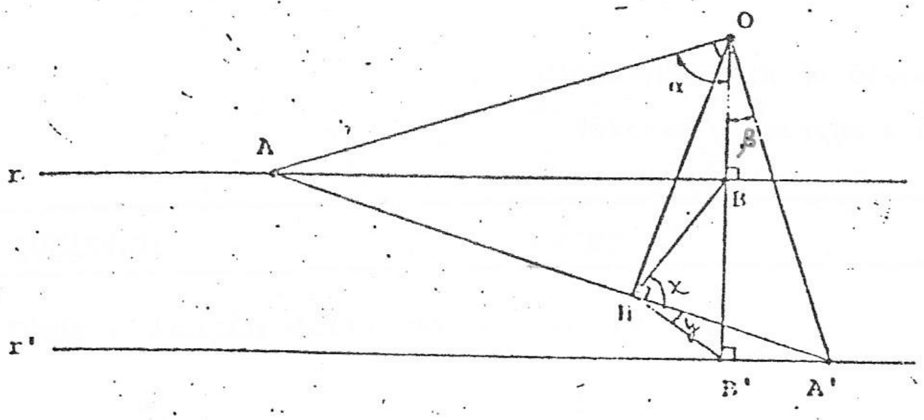
OBS.: Quando n = 14 existem 2 termos com o maior coeficiente, para os valores k = 9 e k = 10.

7a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

São dadas duas retas paralelas r e r' e um ponto O. Determine o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de O aos segmentos de reta AA', vistos de O sob um ângulo reto e tais que A pertence a r e A' pertence a r'. Sabe-se que:

distância de O a r : d
distância de O a r': p
distância de r a r': $p-d$.

SOLUÇÃO



$\#$ OBHA é inscritível $\Longrightarrow B\hat{H}A' = B\hat{O}A = \alpha$

$\#$ OHB'A' é inscritível $\Longrightarrow B'\hat{H}A' = B'\hat{O}A' = \beta$

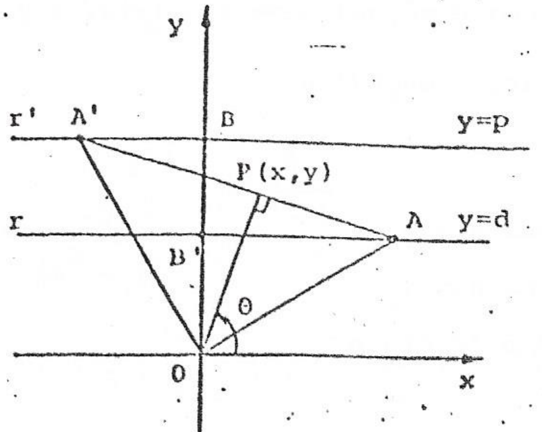
$B\hat{H}B' = B\hat{H}A' + B'\hat{H}A' = \alpha + \beta = 90^\circ$

B e B' fixos
$B\hat{H}B' = 90^\circ = C^{te}$ $\Longrightarrow$ L.G. de H é um círculo de

Diâmetro $\overline{BB'}$: centro $\Longrightarrow$ ponto médio de $\overline{BB'}$; raio $= \dfrac{p-d}{2}$

OBS.: Excluindo-se os pontos B e B'

2ª. SOLUÇÃO



equação de AA' (forma normal):

$$x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta = k = \overline{OP}$$

interseções:

$$AA' \cap r \Longrightarrow x_A = \frac{k - d \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$AA' \cap r' \Longrightarrow x_{A'} = \frac{k - p \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

mas $OA \perp OA' \Longrightarrow$

$$\frac{d}{x_A} \cdot \frac{p}{x_{A'}} = -1 \Longrightarrow x_A \cdot x_{A'} = -pd$$

assim:

$$-pd = x_A \cdot x_{A'} = \frac{k^2 - k(p+d)\operatorname{sen}\theta + pd\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\Longrightarrow -pd(1 - \cancel{\operatorname{sen}^2\theta}) = k^2 - k(p+d)\operatorname{sen}\theta + \cancel{pd\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\Longrightarrow k^2 - k.(p+d)\operatorname{sen}\theta + pd = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{k^2 + pd}{k(p+d)}$$

mas $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{k}$

$x^2 + y^2 = k^2$

$$\Longrightarrow \frac{y}{\cancel{k}} = \frac{x^2 + y^2 + pd}{\cancel{k}(p+d)} \Longrightarrow x^2 + y^2 - (p+d)y + pd = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 + \left(y - \frac{p+d}{2}\right)^2 = \left(\frac{p-d}{2}\right)^2$$

CIRCUNFERÊNCIA de diâmetro BB'

(exceto os pontos B e B')

8a. QUESTÃO: (ITEM A) VALOR: 0,6

Dada a função definida nos reais por

$$y = e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

a) estude a sua variação quanto a: continuidade e possível simetria de sua representação, crescimento ou decrescimento, extremos, inflexões e assíntotas.

SOLUÇÃO

$$y = e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

dom $y = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Longrightarrow$ a função é contínua para $x \neq \pm 1$

a função é par (simétrica em relação a Oy) e positiva

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \cdot e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}} \Longrightarrow x > 0 \Longrightarrow y' < 0 \Longrightarrow \text{FUNÇÃO DECRESCENTE}$$

$$x < 0 \Longrightarrow y' > 0 \Longrightarrow \text{FUNÇÃO CRESCENTE}$$

$\Longrightarrow (0,1)$ é MÁXIMO

$$y'' = \frac{2(3x^4-1)}{(x^2-1)^4} \cdot e^{\frac{x^2}{x^2-1}} \Longrightarrow y'' < 0 \Longrightarrow \frac{-1}{\sqrt[4]{3}} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \Longrightarrow \text{CONCAVIDADE "PARA BAIXO"}$$

$$y'' > 0 \Longrightarrow x < -1;\ -1 < x < \frac{-1}{\sqrt[4]{3}},\ \frac{1}{\sqrt[4]{3}} < x < 1,\ x > 1$$

CONCAVIDADE "PARA CIMA"

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}},\ e^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}}\right) \Longrightarrow \text{SÃO PONTOS DE INFLEXÃO}$$

<u>ASSÍNTOTAS</u>

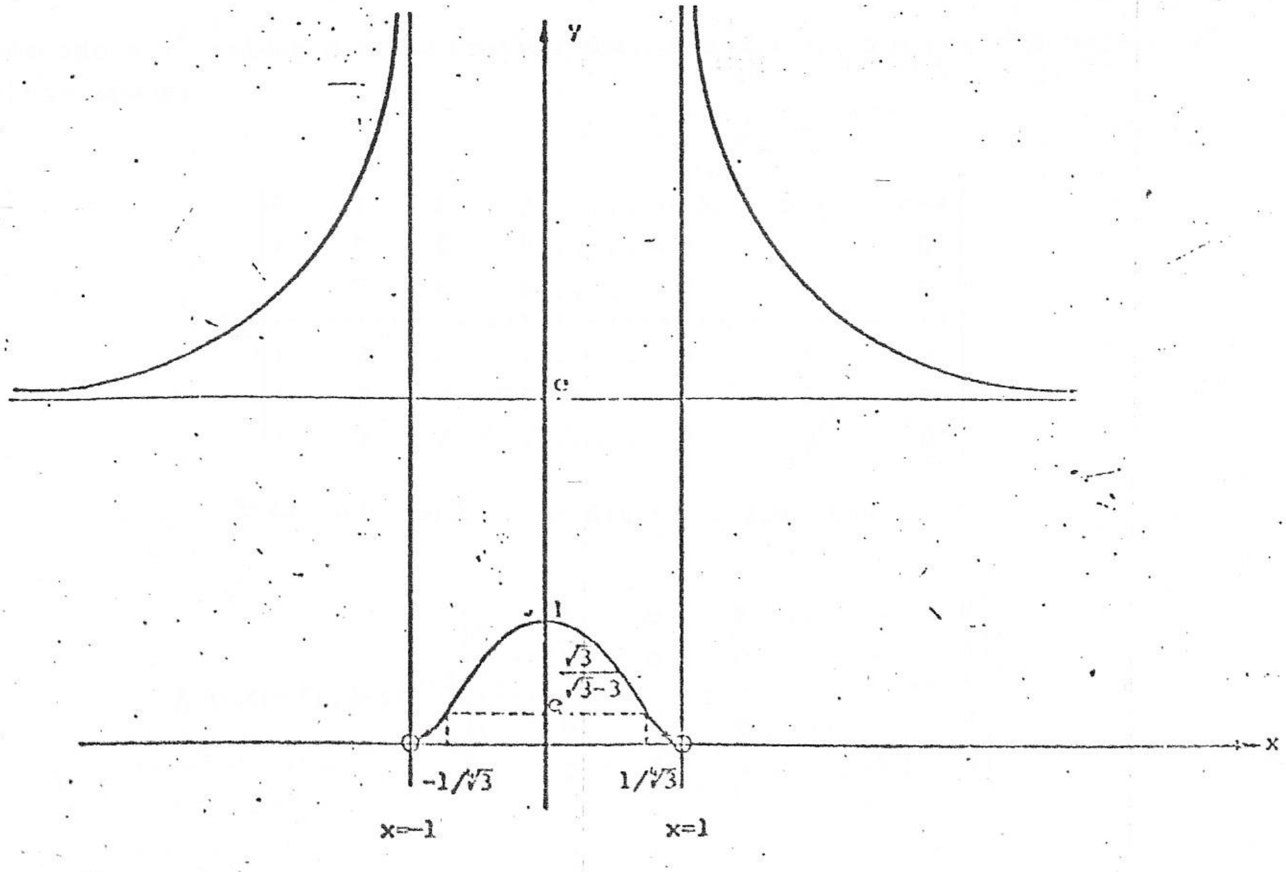
1) <u>Verticais:</u> $x = \pm 1$ com $\lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to -1^-} y = "+\infty"$

$$\lim_{x \to 1^-} y = \lim_{x \to -1^+} y = 0$$

2) <u>Horizontal:</u> $y = e$ pois $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} = e$

8a. QUESTÃO: (ITEM B) VALOR: 0,4

b) faça o esboço gráfico da curva representativa da função.



9a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja D o determinante da matriz $A = \left[a_{ij}\right]$ de ordem n, tal que $a_{ij} = |i-j|$. Mostre que:

$$D = (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

SOLUÇÃO

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-4 \\ \dots & & & & & & \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & & 0 \end{vmatrix}$$

Mantendo a 1ª linha e substituindo cada uma das outras por ela menos a anterior temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Mantendo a 1ª coluna e substituindo cada uma das outras por ela mais a 1ª coluna temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace na última coluna temos:

$$\Delta = (n-1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1)(-1)^{n+1}\, 2^{n-2} = (-1)^{n-1}\, (n-1).2^{n-2}$$

$$\boxed{\Delta = (-1)^{n-1}.\,(n-1).2^{n-2}}$$

10. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Dada a matriz $M = (m_{ij})$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e o conjunto $A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4\}$, define-se em A uma relação R por: $a_i \,R\, a_j \leftrightarrow m_{ij} = 1$

verifique se R é uma relação de equivalência.

SOLUÇÃO

i) a relação é REFLEXIVA, pois:

$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = 1 \Rightarrow \forall a_i \in A,\ a_1 \,R\, a_i$

ii) a relação é SIMÉTRICA, pois:

como a matriz M é simétrica:

$a_i \,R\, a_j \Leftrightarrow m_{ij} = 1 \Leftrightarrow m_{ji} = 1 \Leftrightarrow a_j \,R\, a_i$

iii) a relação NÃO é TRANSITIVA, pois:

$a_1 \,R\, a_4$ (pois $m_{14} = 1$)

$a_4 \,R\, a_2$ (pois $m_{42} = 1$)

mas $a_1 \not R\, a_2$ (pois $m_{12} = 0$)

logo não é de EQUIVALÊNCIA