IME – ÁLGEBRA – 1979/1980

JS (Enunciados: 22/11/79, pág. 11; Soluções: 23/11/79, pág. 12; 24/11/79, pág. 12; 26/11/79, pág. 15; 27/11/79, pág. 12)

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. NÃO ASSINE A PROVA.
2. Você tem 10 (dez) minutos para examinar a prova, no que diz respeito a sua montagem. Ela contém além da capa e desta Folha de Instruções, uma folha com simbolos, mais 16 (dezesseis) folhas de Questões, numeradas de 1 (um) a 16 (dezesseis), e 3 (três) folhas para rascunho. O valor das questões está especificado nos enunciados.
3. Decorridos os 10 (dez) minutos iniciais, nenhum candidato poderá mais dirigir-se à Comissão Fiscalizadora. A interpretação das questões faz partes da solução: em momento algum faça perguntas neste sentido.
4. O espaço destinado à solução de cada questão é suficiente; portanto, não será considerada qualquer solução fora do local especificado. Use o verso das folhas de questões para rascunho. Não serão consideradas as soluções ou os desenvolvimentos apresentados em rascunhos.
5. Utilize a caneta esferográfica fornecida pela Comissão Fiscalizadora. As figuras julgadas necessárias poderão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores.
6. Não será fornecido material suplementar.
7. A prova está sob a forma de caderno. Não é permitido destacar suas folhas nem desgrampeá-lo.
8. Ao entregar a prova, devolva todo o material recebido.
9. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Seja sucinto, evitando divagações.
10. Duração da prova: 4 horas.

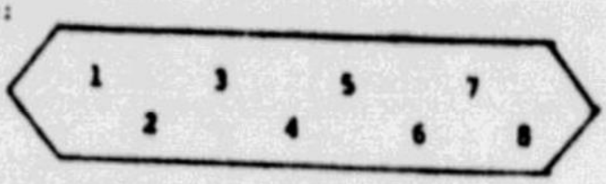
BOA SORTE

1a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (Valor 1,0)

ENUNCIADO:

Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama seguinte:



Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: os remadores A e B só podem sentar no lado ímpar e o remador C, no lado par. Os remadores D, E, F, G, H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

Solução:

2a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja $I = [-1,2] \subset \mathbb{R}$. Dê exemplo de uma função contínua em I tal que não exista um ponto $a \in]-1,2[$ que satisfaça à condição:

$$f(2) - f(-1) = 3f'(a)$$

Solução:

---

a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Determine o polinômio $f(x)$ de coeficientes rácionais e do $7^{\underline{o}}$ grau, sabendo-se que: $f(x)+1$ é divisível por $(x-1)^4$ e que $f(x)-1$ é divisível por $(x+1)^4$.

olução:

---

a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja a sequência real (x_n), $n=0,1,\dots$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, $n = 2,3,\dots$ Prove que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n}\right) = 0$

Solução:

5a. **QUESTÃO**
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Resolva as equações:

$$x^3 - 7x^2 - 204x + 1260 = 0$$

$$x^3 - 15x^2 - 394x + 840 = 0$$

sabendo-se que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor de uma raiz da segunda.

Solução:

6a. **QUESTÃO**
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja, para $n = 1,2,3...$ a coleção

$$B(n) = \left\{ M \mid M = [m_{ij}] \text{ é matriz quadrada de ordem } n \text{ e } |m_{ij}| = 1 \right\}.$$

(Note que $B(2)$ tem $2^4 = 16$ elementos). Prove que, se $M \in B(n)$, então o determinante de M é multiplo de 2^{n-1}, para $n = 1,2,3,...$

Solução:

7a. **QUESTÃO**
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja f uma função real de variável real, não constante, contínua, tal que existe uma função ϕ, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = \phi(f(x), y)$, para todo x e todo y reais. Prove que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Solução:

8a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Prove que

$$n^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad , \quad \text{onde} \quad a_i = (n-1)n + 2i - 1$$

Solução:

9a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Um velho manuscrito descrevia a localização de um tesouro enterrado:

"Há somente duas árvores, A e B, em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira, e B é uma jaboticabeira. A partir do centro K do canteiro, meça a distância em linha reta até a mangueira. Vire 90° à esquerda e percorra a mesma distância até o ponto C. Volte ao canteiro. Meça a distância em linha reta até a jaboticabeira. Vire 90° à direita e percorra a mesma distância até o ponto D. O tesouro está no ponto médio T do segmento CD".

Um aventureiro achou o manuscrito, identificou as árvores mas, como o canteiro desaparecera com o passar do tempo, não conseguiu localizá-lo, e desistiu da busca. O aluno Sá Bido, do IME, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro. Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de A = (5,3) e B = (8,2).

Solução:

10a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Por um ponto M qualquer de uma hipérbole (h), traça-se uma paralela a uma assíntota (a) de (h): esta paralela encontra uma diretriz (d) de (h) em D. Sendo F o foco de (h) correspondente à diretriz (d), mostre que: MD=MF.

Solução:

SÍMBOLOS

$[a, b]$	intervalo fechado real de extremos a e b
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$]p, q[$	intervalo aberto real de extremos p e q
$f'(x)$	valor da derivada de f no ponto x
$A=\{t \mid P(t)\}$	A é o conjunto dos elementos t que têm a propriedade P.
$H=[h_{ms}]$	H é matriz cujo elemento da m-ésima linha e s-ésima coluna é h_{ms}
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
$\phi : U \to V$	ϕ é função definida em U e tomando valores em V.

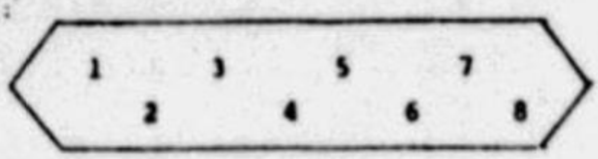
IME-CEE/79/80 — ÁLGEBRA — Folha 1

1a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (Valor 1,0)

ENUNCIADO:

Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama seguinte:



Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: os remadores A e B só podem sentar no lado ímpar e o remador C, no lado par. Os remadores D, E, F, G, H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

Solução:

A e B $\longrightarrow C_4^2 \cdot 2!$

C $\longrightarrow C_4^1 \cdot 1!$

D, E, F, G, H $\longrightarrow P_5 = 5!$

Pelo princípio da multiplicação, o nº total de possibilidades é

$C_4^2 \cdot 2!\, C_4^1\, 1!\, 5! = 12 \cdot 4 \cdot 120 = 48 \times 120 = 5.760$

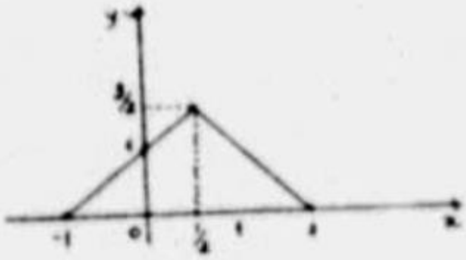
IME-CEE/79/80	ÁLGEBRA		Folha 3

2a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO: Seja $I = [-1,2] \subset \mathbb{R}$. Dê exemplo de uma função contínua em I tal que não exista um ponto $a \in]-1,2[$ que satisfaça à condição:

$$f(2) - f(-1) = 3f'(a)$$

<u>Solução</u>:



Seja f(x) definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - x, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Claramente f é contínua em $I = [-1, 2]$. Particularmente em $x = \frac{1}{2}$, temos

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} 2 - x = \frac{3}{2} = f(\tfrac{1}{2})$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} x + 1 = \frac{3}{2} = f(\tfrac{1}{2})$$

Logo, f é contínua em $\frac{1}{2}$.

Observamos ainda que f'(x) é tal que

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$ e f' não existe em $x = \frac{1}{2}$

Portanto, a condição $f(2) - f(-1) = 3f'(a)$ não é satisfeita para nenhum $a \in (-1, 2)$, já que $f(2) - f(-1) = 0$ e $3f'(a) \neq 0$. CQD.

IME-CEE/79/80	ÁLGEBRA		Folha 4

1a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Determine o polinômio $f(x)$ de coeficientes racionais e do 7º grau, sabendo-se que: $f(x)+1$ é divisível por $(x-1)^4$ e que $f(x)-1$ é divisível por $(x+1)^4$.

Solução:

Se $f(x) + 1$ é divisível por $(x-1)^4$, concluímos que:

$(f(x) + 1)' = f'(x)$ é divisível por $(x - 1)^3$

Se $f(x) - 1$ é divisível por $(x + 1)^4$ concluímos que $(f(x) - 1)' = f'(x)$ é divisível por $(x + 1)^3$

Como $f(x)$ é do 7º grau, $f'(x)$ é um polinômio do 6º grau divisível por $(x + 1)^3$ e $(x - 1)^3$. Logo:

$$f'(x) = A\,(x + 1)^3(x - 1)^3 = A(x^2 - 1)^3 =$$
$$= A(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)$$

Daí:

$$f(x) = A\left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} - x\right) + B$$

Porém $f(1) + 1 = 0 \longrightarrow f(1) = -1$
$f(-1) - 1 = 0 \longrightarrow f(-1) = 1$

Logo:

$$\begin{cases} A\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{5} + 1 - 1\right) + B = -1 \\ A\left(-\frac{1}{7} + \frac{3}{5} - 1 + 1\right) + B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{16}{35}A + B = -1 \\ \frac{16}{35}A + B = 1 \end{cases} \longrightarrow A = \frac{35}{16},\ B = 0$$

Portanto:

$$f(x) = \frac{5x^7}{16} - \frac{21}{16}x^5 + \frac{35}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$$

IME-CEB/79/80	ÁLGEBRA		Folha 6

4a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja a sequência real (x_n), $n=0,1,\ldots$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, $n = 2,3,\ldots$ Prove que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right) = 0$

__Solução__:

Consideremos as subseqüências $\alpha_n = x_{2n}$ e $\beta_n = x_{2n+1}$

Temos: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n - \alpha_{n-1} = 0$

Seja $\gamma_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, $\alpha_0 = 0$

Temos $\alpha_n = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$

Mas como $\gamma_n \to 0$, pelo teorema de Cesaro

$$\frac{\alpha_r}{n} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n}{n} \to 0.$$

Analogamente: $\frac{\beta_n}{n} \to 0$

Logo $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0.$

Daí $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - 1}{n} = 0$

5a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Resolva as equações:

$$x^3 - 7x^2 - 204x + 1260 = 0$$

$$x^3 - 15x^2 - 394x + 840 = 0$$

sabendo-se que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor de uma raiz da segunda.

Solução:

Tomemos a transformada da 1ª em $y = \frac{x}{3}$

Temos $x = 3y$ e:

$(3y)^3 - 7(3y)^2 - 204(3y) + 1260 = 0$

$27y^3 - 63y^2 - 612\,y + 1260 = 0 \; (\div 3)$

$3y^3 - 7y^2 - 68y + 140 = 0$

Para calcular as raízes comuns a $3x^3 - 7x^2 - 68x + 140 = 0$ e $x^3 - 15x^2 - 394x + 840 = 0$, determinaremos o MDC dos polinômios pelo algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 - 7x^2 - 68x + 140 & x^3 - 15x^2 - 394x + 840 \\ \hline -3x^3 + 45x^2 + 1182x - 2520 & 3 \\ \hline \quad 38x^2 + 1114x - 2380 \; (\div 2) & \\ \quad 19x^2 + 557\,x - 1190 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 19x^3 - 285x^2 - 7486x + 15960 & 19x^2 + 557x - 1190 \\ \hline -19x^3 - 557x^2 + 1190x & x \; - 842 \\ \hline \quad - 842x^2 - 6296x + 15960 \; (x19) & \\ \quad -15998x^2 - 119624x - 303240 & \\ \quad +15998x^2 + 468994x + 1001980 & \\ \hline \quad \boxed{-349370x + 698740 = 0} & \end{array}$$

A raiz comum é $x = \dfrac{698740}{349370} = 2$

Temos:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -7 & -68 & 140 \\ \hline 2 & 3 & -1 & -70 & \underline{|0} \end{array}$$

(Continuação da solução da 5a. Questão, Item ÚNICO)

$3x^2 - x - 70 = 0 \leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 840}}{6} = \dfrac{1 \pm 29}{6} \leftrightarrow x = 5$ ou $x = \dfrac{14}{3}$

Logo, as raízes de $x^3 - 7x^2 - 204\,x + 1260 = 0$ são

$x_1 = 3 \times 2 = 6$

$x_2 = 3 \times 5 = 15$

$x_3 = 3 \times \dfrac{14}{3} = -14$

Para a outra equação

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -15 & -394 & 840 \\ \hline 2 & 1 & -13 & -420 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 13x - 420 = 0 \leftrightarrow x = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 + 1680}}{2} = \dfrac{13 \pm 43}{2} \leftrightarrow x = 28$ ou $x = -15$

Logo as raízes de $x^3 - 15x^2 - 394\,x + 840 = 0$ são:

$x_1 = 2$

$x_2 = 28$

$x_3 = -15$

6a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja, para $n = 1,2,3\ldots$ a coleção

$$B(n) = \left\{ M \mid M = [m_{ij}] \text{ é matriz quadrada de ordem } n \text{ e } |m_{ij}| = 1 \right\}.$$

(Note que $B(2)$ tem $2^4 = 16$ elementos). Prove que, se $M \in B(n)$, então o determinante de M é multiplo de 2^{n-1}, para $n = 1,2,3,\ldots$

Solução

Consideremos um elemento de b_n

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Anulemos os elementos da 1ª coluna, exceto o 1º, somando ou subtraindo a 1ª linha a todas as demais, conforme o sinal de cada elemento. Obteremos um determinante da forma.

$$\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & \cdots\cdots & b_{3n} \\ 0 & b_{n2} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} \\ & & \\ b_{n2} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta''}, \text{ onde}$$

$a_{11} = 1$ ou $a_{11} = -1$ e Δ'' é um determinante de ordem $n - 1$ em que todos os elementos são 0, 2 ou -2 (por terem sido obtidos por operações do tipo $\pm 1 \pm 1$).

Temos então:

$$\Delta = \Delta' = a_{11} \begin{vmatrix} 2C_{22} & \cdots\cdots & 2C_{2n} \\ 2C_{32} & \cdots\cdots & 2C_{3n} \\ 2C_{n2} & \cdots\cdots & 2C_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{onde } C_{ij} = 0, 1 \text{ ou } -1$$

Colocando em cada linha, 2 em evidência:

$$\Delta = \Delta' = a_{11} \cdot 2^{n-1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} C_{22} & \cdots\cdots & C_{2n} \\ C_{n2} & \cdots\cdots & C_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta'''}$$

Evidentemente Δ''' é inteiro (é formado por elementos inteiros). Logo Δ é múltiplo de 2^{n-1}.

IME-CEE/ 79/80	ÁLGEBRA		Folha 12

8a. QUESTÃO ITEM ÚNICO (1,0 pontos)	ENUNCIADO: Prove que

$$n^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad , \quad \text{onde} \quad a_i = (n-1)n + 2i - 1$$

Solução:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (n-1)n + 2i - 1 =$$

$$= n[(n-1)n - 1] + 2\sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= n[n^2 - n - 1] + \cancel{2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} =$$

$$= n^3 - n^2 - n + n^2 + n =$$

$$= n^3$$

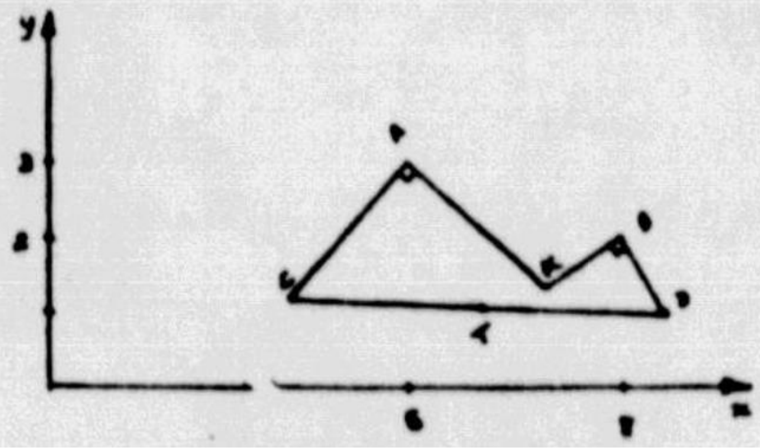
9a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO: Um velho manuscrito descrevia a localização de um tesouro enterrado:

"Há somente duas árvores, A e B, em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira, e B é uma jaboticabeira. A partir do centro K do canteiro, meça a distância em linha reta até a mangueira. Vire 90° à esquerda e percorra a mesma distância até o ponto C. Volte ao canteiro. Meça a distância em linha reta até a jaboticabeira. Vire 90° à direita e percorra a mesma distância até o ponto D. O tesouro está no ponto médio T do segmento CD".

Um aventureiro achou o manuscrito, identificou as árvores mas, como o canteiro desaparecera com o passar do tempo, não conseguiu localisá-lo, e desistiu da busca. O aluno Sá Bido, do IME, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro. Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de A=(5,3) e B = (8,2).

Solução:



(Continuação da Solução da 9a. Questão, Item ÚNICO)

Seja k um ponto qualquer (a, b)

O vetor $\overrightarrow{AC}$ é obtido aplicando-se uma rotação de 90^o, no sentido trigonométrico, a $\overrightarrow{KA}$

Temos:

$\overrightarrow{KA} = A - K = (5 - a, 3 - b)$

$\overrightarrow{AC} = i(\overrightarrow{KA}) = i(5-a + (3-b)\ i) = (b-3) + (5-a)\ i = (b-3,\ 5-a)$

Logo: $C = A + \overrightarrow{AC} = (5,3) + (b-3,\ 5-a) = (2+b,\ 8-a)$

Analogamente:

$\overrightarrow{KB} = B - K = (8-a\ ,\ 2-b)$

$\overrightarrow{BD} = -i\overrightarrow{KB} = -i(8-a + (2-b)i) = (2-b) + (a-8)i = (2-b,\ a-8)$

Logo $D = B + \overrightarrow{BD} = (8,\ 2) + (2-b,\ a-8) = (10-b,\ a-6)$

O ponto T é:

$$T = \frac{B + D}{2} = \frac{(2+b\ ,\ 8-a) + (10-b,\ a-6)}{2} = \frac{(12,\ 2)}{2} = (6,1)$$

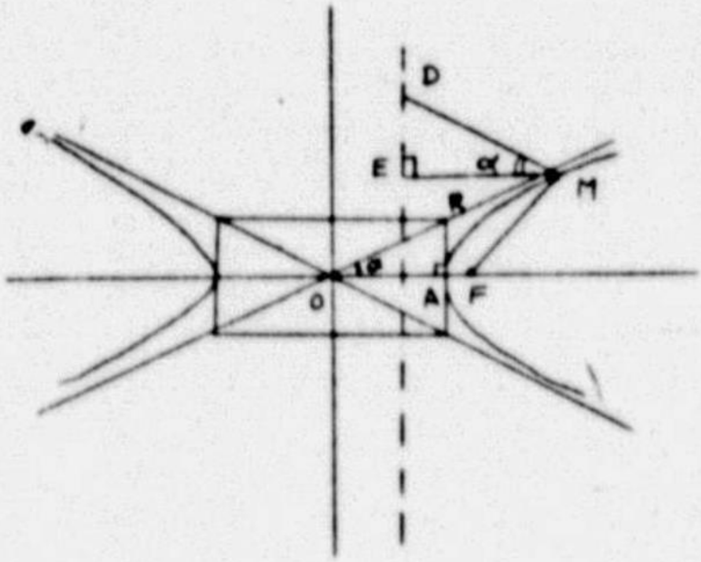
Logo, T independe de K.

10a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Por um ponto M qualquer de uma hipérbole (h), traça-se uma paralela a uma assíntota (a) de (h): esta paralela encontra uma diretriz (d, de (h) em D. Sendo F o foco de (h) correspondente à diretriz (d), mostre que: MD=MF.

Solução:



Sabemos que $\frac{MF}{ME} = \frac{c}{a}$

Mas, da semelhança dos triângulos OAR e MDE:

$$\frac{MD}{ME} = \frac{OR}{OA} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{c}{a}$$

Logo

$$MF = ME \cdot \frac{c}{a} = \frac{MD}{\frac{c}{a}} \cdot \frac{c}{a} = MD$$