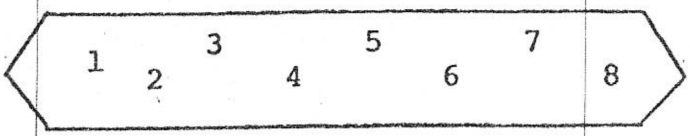
$[a, b]$	intervalo fechado real de extremos a e b
IR	conjunto dos números reais
$]p, q[$	intervalo aberto real de extremos p e q
$f'(x)$	valor da derivada f no ponto x
$A = \{t \mid p(t)\}$	A é o conjunto dos elementos t que têm a propriedade p.
$H = \lvert h_{ms} \rvert$	H é matriz cujo elemento da m-ésima linha e s-ésima coluna é h_{ms}
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
$\phi : U \to V$	ϕ e função definida em U e tomando valores em V.

1a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama seguinte:



Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: os remadores A e B só podem sentar no lado ímpar e o remador C, no lado par. Os remadores D, E, F, G, H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

SOLUÇÃO

Além de A e B vamos escolher mais 2 elementos para guarnecer o lado ímpar = C_5^2 pois C só pode ficar no lado par, juntamente com os 3 restantes. Como as posições dos elementos de cada lado podem ser trocadas, temos:

$$C_5^2 \times 4! \times 4! = \frac{5 \times 4}{2} \times 24 \times 24 = 5.760$$

OUTRA SOLUÇÃO:

A e B tem 4 x 3 possibilidades

C tem 4 possibilidades

e os demais tem 5! possibilidades

Logo no total:

$$4 \times 3 \times 4 \times 5! = 48 \times 5! = 5.760$$

2a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Seja $I = [-1,2] \subset \mathbb{R}$. Dê exemplo de uma função contínua em I tal que não exista um ponto $a \in \,]-1,2[$ que satisfaça à condição:

$$f(2) - f(-1) = 3f'(a)$$

Solução:

Basta que a função não seja derivável em algum ponto pertencente a $[-1, 2]$.

Por exemplo:

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

temos que:

$$f(-1) = f(2) = \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow f(2) - f(-1) = 0$$

mas para qualquer $a \in (-1, 2)$, se existir $f'(a)$ então $f'(a) \neq 0$.

3a.QUESTÃO no final da prova

4a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Seja a seqüência real (x_n), $n=0,1,\ldots$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, $n = 2,3,\ldots$ Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} \right) = 0$.

Solução:

$x_3 - x_1$
$x_4 - x_2$
$\cancel{x_5} - \cancel{x_3}$
$x_6 - \cancel{x_4}$
$\cancel{x_m} - \cancel{x_{m-2}}$
$x_{m+1} - \cancel{x_{m-1}}$
$x_{m+2} - \cancel{x_m}$

Seja $\alpha_n = x_{n+2} - x_n$; $n = 1,2,\ldots$

Do enunciado segue-se que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Mas se $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2} - x_2 - x_1 + x_{n+1}}{n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2}}{n} = 0$$

Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2}}{n+2} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n-1}}{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n-1}}{n} = 0$ (*)

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

o resultado obtido em (*) é mais forte que o resultado desejado.

Demonstração do LEMA:

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \exists B > 0$ tq $|\alpha_n| \le B$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, n > N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, n > N_2 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2BN_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N = \max\{N_1, N_2\}$ tq $n > N \Rightarrow \left|\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\right| \le$

$$\le \underbrace{\frac{|\alpha_1|}{n} + \frac{|\alpha_2|}{n} + \cdots}_{< N_1 \cdot B \frac{\varepsilon}{2BN_1}} + \underbrace{\cdots + \frac{|\alpha_n|}{n}}_{< \frac{\varepsilon}{2n}(n-N_1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

5a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Resolva as equações:

$$x^3 - 7x^2 - 204x + 1260 = 0$$
$$x^3 - 15x^2 - 394x + 840 = 0$$

sabendo-se que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor uma raiz da segunda.

Soluçao:

(i) Por inspeçao temos que:

$x = 2$ é raiz de $x^3 - 15x^2 - 394x + 840 = 0$

	1	-15	-394	840
2	1	-13	-420	0

$x^2 - 13x - 420 = 0 \iff \boxed{x = -15}$ ou $\boxed{x = 28}$

(ii) Testando-se os triplos das raízes da equação anterior, observamos que $x = 6$ é raiz de $x^3 - 7x^2 - 204x + 1260 = 0$

	1	-7	-204	1260
6	1	-1	-210	0

$x^2 - x - 210 = 0 \iff \boxed{x = 15}$ ou $\boxed{x = -14}$

6a. QUESTÃO: ITEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO

Seja, para n = 1,2,3 ... a coleção $B(n) = \left\{ M \mid M = [m_{ij}] \text{ é matriz quadrada de ordem } n \text{ e } |m_{ij}| = 1 \right\}$.

(Note que $B(2)$ tem $2^4 = 16$ elementos). Prove que, se $M \in B(n)$, então o determinante de M é multiplo de 2^{n-1}, para n = 1,2,3,...

Solução:

(i) Se $|m_{ij}| = 1 \Rightarrow m_{ij} = \pm 1$

$\Rightarrow m_{ij} - m_{i1} \in \{0,2,-2\}$ .... (1)

para todo $i = 1,2, \ldots, n$ e $j = 2,3,\ldots,n$

(ii) Seja N a matriz obtida de M subtraindo-se a 1ª coluna de M das demais.

Pelo teorema de JACOBI, $\det(M) = \det(N)$.

De (1), colocando-se o fator 2 em evidência nas n-1 últimas colunas de N, obtém-se uma matriz P, tal que:

$$\det(M) = \det(N) = 2^{n-1}.\det(P).$$

Porém, como todos os elementos da matriz P pertencem ao conjunto $\{0,1,-1\}$, segue-se que $\det(P)$ é inteiro.

Logo $\det(M) = 2^{n-1}.k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Outra Solução:

Por Indução:

(i) Vale para n = 1

$M = [\pm 1] \rightarrow \det M = \pm 2^0$

(ii) Supondo válida a propriedade para n mostraremos que vale para n + 1.

Substituindo-se a 1ª coluna de M por sua soma com a 2ª coluna, obtem-se uma nova coluna com elementos pertencentes ao conjunto $\{2, 0, -2\}$. Colocando-se em evidência o fator 2 dessa coluna obtem-se uma nova matriz N tal que:

- $\det(M) = 2 \det(N)$ ... (1)
- A 1ª coluna é formada por elementos do conjunto $\{1, -1, 0\}$
- As outras n colunas são formadas por elementos do conjunto $\{1, -1\}$.

Desenvolvendo por Laplace o det(N) através dos elementos da 1ª coluna temos:

$\det(N) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \det(N_i)$, onde N_i é de ordem $\underline{n}$, formada com elementos do conjunto $\{1, -1\}$ e $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

Pela hipótese de indução, $\det(N_i) = 2^{n-1}.k_i$

Assim: $\det(N) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i.k_i 2^{n-1} = 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i.k_i = 2^{n-1}.k;\ k \in \mathbb{Z}$

De (1) temos:

$\det(M) = 2\det(N) = 2.2^{n-1}.k = 2^n.k,\ k \in \mathbb{Z}$ C.Q.D.

7a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO

Seja f uma função real de variável real, constante, contínua, tal que existe uma função ϕ, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $(x+y) = \phi(f(x), y)$, para todo x e todo y reais. Prove que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Solução:

LEMA: f é contínua e não monótona $\Longrightarrow$ f é não injetora

Demonstração

Sejam $x_1 < x_2 < x_3$ tais que:

$$\begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_2) > f(x_3) \end{matrix} \quad \text{(f é não monótona)}$$

Seja $\gamma \in (f(x_1), f(x_2)) \cap (f(x_3), f(x_2))$

$$\text{Logo existem} \begin{cases} \xi_1 \in (x_1, x_2) \text{ e } f(\xi_1) = \gamma \\ \xi_2 \in (x_2, x_3) \text{ e } f(\xi_2) = \gamma \end{cases} \Longrightarrow \text{f é não injetora.}$$

Suponhamos que f não é monótona.

Então existem x_1, x_2 e y tais que

$f(x_1) = f(x_2) = a$

$f(x_1 + y) \neq f(x_2 + y)$, pois f não é constante

Logo

$\phi(f(x_1), y) \neq \phi(f(x_2), y)$

$\phi(a, y) \neq \phi(a, y) \Longrightarrow$ ABSURDO

Logo f é monótona (crescente ou decrescente).

8a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO

Prove que

$$n^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ , onde } a_i = (n-1)n + 2i - 1.$$

Solução:

$$a_i = 2i + (n^2 - n - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} [2i + (n^2 - n - 1)] =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n^2 - n - 1) =$$

$$= n(n+1) + n(n^2 - n - 1) =$$

$$= \cancel{n^2} + \cancel{n} + n^3 - \cancel{n^2} - \cancel{n} =$$

$$= n^3$$

9a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

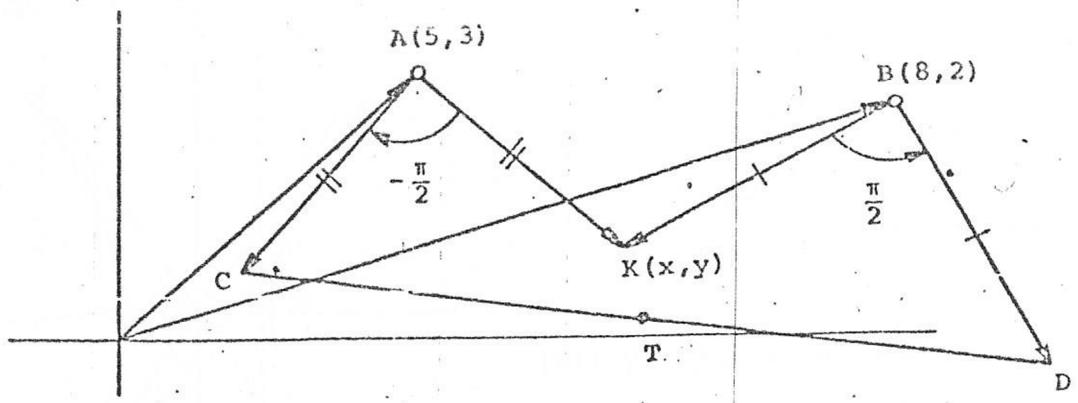
ENUNCIADO:

Um velho manunscrito descrevia a localização a um tesouro enterrado:

"Há somente duas árvores, A e B, em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira, e B é uma jaboticabeira. A partir do centro K do canteiro, meça a distância em linha reta até a mangueira. Vire 90^o à esquerda e percorra a mesma distância até o ponto C. Volte ao canteiro. Meça a distância em linha reta até a jaboticabeira. Vire 90^o à direita e percorra a mesma distância até o ponto D. O tesouro está no ponto médio T do segmento CD".

Um aventureiro achou o manuscrito, identificou as árvores mas, como o canteiro desaparecera com o passar do tempo, não conseguiu localizá-lo, e desistiu da busca. O aluno Sá Bido, do IME, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro. Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de A= (5,3) e B = (8,2).

Solução:



$$[(x-5)+(y-3)i]\,\text{cis}(-\tfrac{\pi}{2}) = [(x-5)+(y-3)i](-i) = (y-3)-(x-5)i$$

$$\Longrightarrow C = [(y-3)+5] + [-(x-5)+3]i$$

$$\Longrightarrow C = (y+2) + (-x+8)i$$

$$[(x-8)+(y-2)i]\,\text{cis}\,\tfrac{\pi}{2} = [(x-8)+(y-2)i].i = -(y-2)+(x-8)i$$

$$\Longrightarrow D = [-(y-2)+8] + [(x-8)+2]i$$

$$\Longrightarrow D = (-y+10) + (x-6)i$$

$$\therefore \quad T = \left[\left(\frac{y+2-y+10}{2}\right) + \left(\frac{-x+8+x-6}{2}\right)i\right] = 6+i$$

$$\Longrightarrow T(6,1)$$

10a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Por um ponto M qualquer de uma hipérbole (h), paça-se uma paralela a uma assíntota (a) de (h): esta paralela encontra a diretriz (d) de (h) em D. Sendo F o foco de (h) correspondente à diretriz (d), mostre que: MD=MF.

Solução:

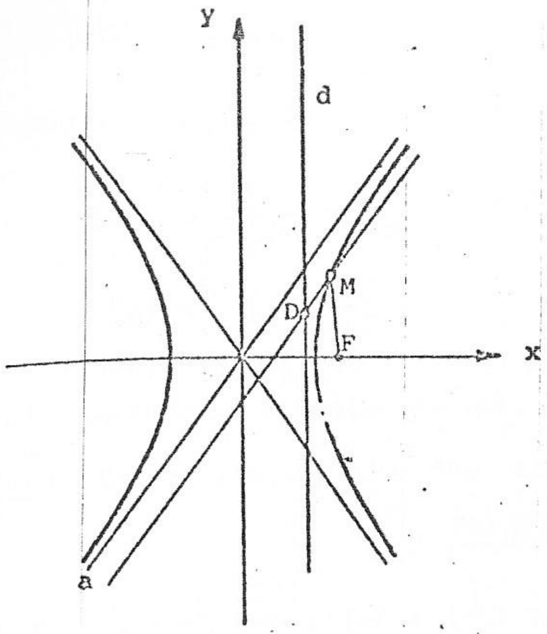
Sejam:

$$(h): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e

$$M(x_o, y_o) \in (h) \Longleftrightarrow y_o^2 = \frac{b^2x_o^2 - a^2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow (d): x = \frac{a^2}{c} \Longrightarrow x_D = \frac{a^2}{c}$$



(a): $y = \frac{b}{a}x \Longrightarrow m_r = \frac{b}{a}$

$r: y - y_o = \frac{b}{a}(x - x_o)$

$D \in r \Longrightarrow y_D - y_o = \frac{b}{a}(x_D - x_o)$

$$MD^2 = (x_D - x_o)^2 + (y_D - y_o)^2 = (x_D - x_o)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_D - x_o)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow MD^2 = (x_D - x_o)^2 . (1 + \frac{b^2}{a^2}) = \frac{c^2}{a^2}(\frac{a^2}{c} - x_o)^2 \Longrightarrow MD^2 = \frac{(a^2 - cx_o)^2}{a^2} = \ldots (1)$$

$$MF^2 = (x_F - x_o)^2 + (y_F - y_o)^2 = (c - x_o)^2 + y_o^2 = c^2 - 2cx_o + x_o^2 + \frac{b^2x_o^2 - a^2b^2}{a^2}$$

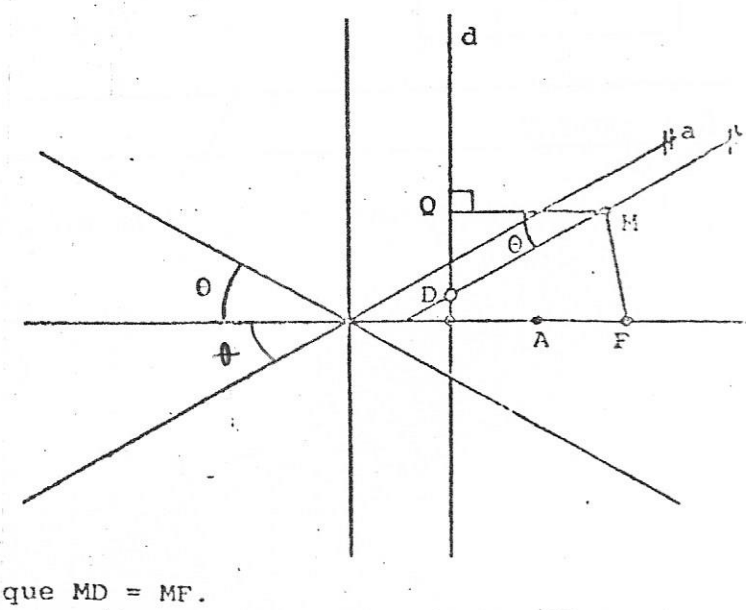
$$MF^2 = \frac{a^2c^2 - 2a^2cx_o + a^2x_o + b^2x_o^2 - a^2b^2}{a^2} = \frac{a^4 - 2a^2cx_o + c^2x_o^2}{a^2}$$

$$MF^2 = \frac{(a^2 - cx_o)^2}{a^2} \quad \ldots (2)$$

de (1) e (2) segue que MF = MD.

Outra Solução

Da figura, tem-se que:



d é diretriz $\Longrightarrow \frac{MF}{MQ} = e = \frac{c}{a}$ (1)

$tg\ \theta = \frac{b}{a} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{a}{c}$

$\Longrightarrow \frac{MQ}{MD} = \cos\theta = \frac{a}{c}$ (2)

Multiplicando-se: (1) e (2) tem-se que MD = MF.

3a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Determine o polinômio f(x) de coeficientes racionais e de 7°. grau, sabendo-se que: f(x)+1 é divisível por $(x-1)^4$ e que f(x)-1 é divisível por $(x+1)^4$.

SOLUÇÃO