IME - CEE - 1977	ÁLGEBRA	01

1a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 0,5

ENUNCIADO: Determine as soluções da equação $36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ dado que uma de suas raízes é a soma das outras duas.

2a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 0,5

ENUNCIADO: Seja um polinômio $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com coeficientes reais. Sabe-se que $p(0) = 0$, $p(2) = 4$, que a reta tangente a $p(x)$ no ponto $(1,1)$ é paralela à reta $y = 2x + 2$ e que a reta tangente a $p(x)$ no ponto $(2,4)$ é perpendicular à reta

$y = -\frac{1}{3}x - 4$. Determine os coeficientes a_3, a_2, a_1, a_0.

3a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Mostre que, em toda reunião constituída de seis pessoas, uma das hipóteses necessàriamente ocorre (podendo ocorrer ambas):

a) existem três pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das três cada se conhecem);

b) existem três pessoas que se desconhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se desconhecem).

4a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 0,5

ENUNCIADO: Seja h uma função contínua, real de variável real. Sabe-se que $h(-1) = 4$; $h(0) = 0$; $h(1) = 8$. Defino uma função g como $g(x) = h(x) - 2$. Prove que a equação $g(x) = 0$ admite, pelo menos, duas soluções distintas.

5a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Seja o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ Determine a imagem de A pela função g, complexa, tal que $g(z) = (4 + 3i)z + 5 - i$

NOTAÇÃO: $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos.

$|z|$ é o valor absoluto de z.

6a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Para $t > 0$ e $x > 1$, defino a função f_t, real de variável real, como:

$$f_t(x) = x\left[\frac{x^t - (t+1)}{t}\right]$$

Supondo-se que o limite indicado exista, define-se

$$f(x) = \lim_{t \to 0} f_t(x) \quad , x > 1$$

Determine $f(e^2)$, onde e é base dos logaritmos neperianos.

IME - CEE - 1977 | ÁLGEBRA | 02

7a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Sejam A, B, C, D matrizes reais 2 x 2.

$A = (a_{ij})$ $\quad A^{-1} = B = (b_{ij})$

$C = (c_{ij})$; $\quad c_{ij} = a_{ij}^{-1}$

$D = (d_{ij})$; $\quad d_{ij} = b_{ij}^{-1}$

Sabe-se que $a_{ij}\ b_{ij} \neq 0$, $1 < i < 2$; $1 < j < 2$, e que C é matriz singular (não admite inversa). Calcule o determinante de D

8a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 0,5

ENUNCIADO: Seja m uma função real de variável real definida como $m(x) = |7 - x|$. Diz-se que uma função u, real de variável real, $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que, se y é ponto do conjunto de definição de u e se $|y - a| < \delta$, então $|u(y) - u(a)| < \varepsilon$.

Quer-se testar a continuidade de m no ponto $x = -2$. Escolhe-se um $\varepsilon = 0{,}01$. Determine um δ conviniente, para este valor de ε. Justifique sua resposta.

NOTAÇÃO: $|h|$ é o valor absoluto de h.

9a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Sejam R e S duas retas quaisquer. Sejam $P_2 = (x_2, y_2)$; $P_4 = (x_4, y_4)$; $P_6 = (x_6, y_6)$ três pontos distintos sobre R e $P_1 = (x_1, y_1)$; $P_3 = (x_3, y_3)$; $P_5 = (x_5, y_5)$ três pontos distintos sobre S. O segmento P_2P_3 não é paralelo ao segmento P_3P_6 não é paralelo ao segmento P_4P_5. Sejam:

a) a interseção dos segmentos P_2P_3 e P_1P_4;

b) interseção de P_1P_6 com P_2P_5 e

c) interseção de P_3P_6 com P_4P_5 Prove que os pontos A, B e C estão em linha reta.

10a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Dadas as parábolas y_1 e y_2, $y_1(x) = 51 - x^2$ e $y_2(x) = x^2 + 1$, sabendo-se que a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 0$ e $x = 5$ é igual a 3 vezes a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 5$ e $x = a$. Determine a.

11a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Se x(t) é o número de parasitas existentes no tempo t, em uma população hospedeira y(t), a relação entre duas populações pode ser descrita $y^A e^{By} = k\, x^R e^{Sx}$ onde A, B, R e S são constantes aproriadas. Pede-se determinar $\frac{dy}{dx}$.

IME - CEE - 1977 | **ÁLGEBRA** | 03

12a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Uma sequência $(x_n)_{n \in N^*}$ de números racionais diz-se regular se $| x_m - x_n | \le m^{-1} + n^{-1}$, $m,n \in N^*$. Dada uma sequência regular $t = (t_n)_{n \in N^*}$ defino k_t = menor inteiro maior que $| t_1 | + 2$.

Sejam x e y sequências regulares e k = máximo $\{ k_x , k_y \}$. Defino a sequência $z = (z_n)_{n \in N^*}$ como $z_n = x_{2kn} \cdot y_{2kn}$, $n \in N^*$. Prove que $(z_n)_{n \in N^*}$ é uma sequência regular.

NOTAÇÃO: N^* é o conjunto dos naturais sem o número zero, isto é $N^* = \{1,2,3,\ldots\}$

Resoluções a seguir.

IME - CEE - 1977	RESOLVIDO	ÁLGEBRA	01

1ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

Sejam as raízes $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$.

$$\begin{cases} a = b + c \quad \dots\dots\dots\dots \ (1) \\ a + b + c = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots \ (2) \\ ab + ac + bc = \frac{5}{36} \quad \dots \ (3) \\ abc = -\frac{1}{36} \quad \dots\dots\dots \ (4) \end{cases}$$

(1) e (2) $\Longrightarrow$ $2a = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow a = \frac{1}{6}$;

(1) e (3) $\Longrightarrow \begin{cases} b + c = \frac{1}{6} \\ b \cdot c = -\frac{1}{6} \end{cases} \Longrightarrow z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6} = 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} z = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ z = -\frac{1}{3}. \end{array} \right.$

RESPOSTA:

$\frac{1}{6}, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{3}.$

2ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1.$

Do enunciado:

$p(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$

$p'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 2$

$p'(2) = 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 3$

$p(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 4$

$p(1) = a_3 + a_2 + a_1 = 1.$

Formando o sistema:

$$\begin{aligned} 3a_3 + 2a_2 + a_1 &= 2 \\ 12a_3 + 4a_2 + a_1 &= 3 \\ 4a_3 + 2a_2 + a_1 &= 2 \\ a_3 + a_2 + a_1 &= 1. \end{aligned}$$

Determinante principal.

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Determinante característico:

$$S_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{sistema impossível (Teor. Rouché)}$$

RESPOSTA:

Não existem valores dos coeficientes que satisfaçam às condições do enunciado.

3ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(1) Considere: (i) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 as 6 pessoas em reunião

(ii) $\begin{cases} a_i \text{ conhece } a_j \iff (a_i, a_j) = 1 \\ a_i \text{ não conhece } a_j \iff (a_i, a_j) = 0 \end{cases}$, para $\begin{matrix} i = 1, \ldots, 6 \\ j = 1, \ldots, 6 \end{matrix}$; $i \neq j$.

Existem $C_6^3 = 20$ grupos de 3 pessoas.

(2) Tentaremos preencher as relações entre as pessoas de cada grupo, de maneira a negar a tese. Caso isso não seja possível para todos os grupos, obviamente, a tese estará demonstrada.

(3) Considere a_{i_1}, a_{i_2} e a_{i_3} um grupo qualquer.

Temos: $\begin{cases} (a_{i_1}, a_{i_2}) = 1 \ldots (1) \\ (a_{i_1}, a_{i_3}) = 1 \ldots (2) \\ (a_{i_2}, a_{i_3}) = 0 \ldots (3) \end{cases}$ OBS.: A hipótese $\begin{cases} (a_{i_1}, a_{i_2}) = 0 \\ (a_{i_1}, a_{i_3}) = 0 \\ (a_{i_2}, a_{i_3}) = 1 \end{cases}$, é a dual e, portanto, o raciocínio e análogo.

Considere uma outra pessoa a_{i_j}, $j \in \{4, 5, 6\}$.

(i) Supor $(a_{i_1}, a_{i_j}) = 1 \ldots (4)$

de (1) e (4), seguindo a orientação (2), temos: $(a_{i_2}, a_{i_j}) = 0 \ldots (5)$

de (2) e (4), seguindo a orientação (2), temos: $(a_{i_3}, a_{i_j}) = 0 \ldots (6)$.

Assim: (3), (5) e (6) $\implies$ tese.

(ii) Supor o complementar de (i), ou seja: $\begin{matrix} (a_{i_1}, a_{i_4}) = 0 \ldots (7) \\ (a_{i_1}, a_{i_5}) = 0 \ldots (8) \\ (a_{i_1}, a_{i_6}) = 0 \ldots (9). \end{matrix}$

3ª QUESTÃO

de (7) e (8) seguindo (2): $(a_{i_4}, a_{i_5}) = 1 \ldots (10)$

de (7) e (9) seguindo (2): $(a_{i_4}, a_{i_6}) = 1 \ldots (11)$

de (8) e (9) seguindo (2): $(a_{i_5}, a_{i_6}) = 1 \ldots (12)$.

Assim (10), (11) e (12) $\Rightarrow$ tese.

RESPOSTA: Conclusão: Por (2) e (3) temos que, necessariamente, a hipótese (a) ou a hipótese (b) ocorrem.

4ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

Tem-se:

$$h(-1) = 4 \Longrightarrow g(-1) = 4 - 2 = 2 > 0$$

$$h(0) = 0 \Longrightarrow g(0) = 0 - 2 = -2 < 0$$

$$h(1) = 8 \Longrightarrow g(1) = 8 - 2 = 6 > 0$$

Teorema de Bolzano:

(i) $g(-1).g(0) < 0 \Longrightarrow$ existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $(-1, 0)$;

(ii) $g(0).g(1) < 0 \Longrightarrow$ existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $(0, 1)$.

Logo existem, pelo menos, duas raízes (soluções) reais distintas para a equação $g(x) = 0$.

RESPOSTA:

Demonstração

5ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

PRIMEIRA

Façamos:

$$z = a + bi$$

$$g(z) = x + yi.$$

Temos:

$$g(z) = x + yi = (4+3i)(a+bi)+5-i =$$

$$= (4a-3b+5)+(4b+3a-1)i.$$

Da igualdade dos complexos:

$$\begin{cases} 4a - 3b + 5 = x \\ 4b + 3a - 1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} 12a - 9b + 15 = 3x \\ 16b + 12a - 4 = 4y \end{cases}$$

$$25b - 19 = 4y - 3x$$

$$\iff \begin{cases} b = \dfrac{4y - 3x + 19}{25} \\ a = \dfrac{3y + 4x - 17}{25}. \end{cases}$$

Como $|z| = 1 \iff a^2 + b^2 = 1$, logo:

$$\left(\frac{4x + 3y - 17}{25}\right)^2 + \left(\frac{4y - 3x + 19}{25}\right)^2 = 1 \iff$$

$\iff (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$, equação de uma circunferência de círculo de centro $C(5, -1)$ e raio $R = 5$.

SEGUNDA

A função dada corresponde a uma roto-homotetia (correspondente a multiplicação por $4 + 3i$) e uma translação (correspondente à soma com $5 - i$). Daí, como $|4 + 3i| = 5$, a circunferência A transforma-se numa circunferência de raio 5 vezes maior e centro $(5, -1)$. Daí,

$$g(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2 + (y+1)^2 = 5^2\}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-(5-i)| = 5 \}$$

RESPOSTA:
$\{(x,y) \in \mathbb{C} \mid (x-5)^2 + (y+1)^2 = 25\}$

6ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

$$f_t(x) = x \cdot \left[\frac{x^t - 1 - t}{t}\right]$$

Cálculo de $f(x) = \lim\limits_{t \to 0} f_t(x)$

1ª solução: equivalência

quando $t \to 0 \quad u^t - 1 \sim t.\ell n\, u$

logo

$$f(x) = \lim_{t \to 0} x \cdot \left[\frac{t \cdot \ell n\, x - t}{t}\right] \implies f(x) = x(\ell n\, x - 1)$$

2ª solução: L'HÔPITAL

$$f(x) = \lim_{t\to 0} x \cdot \left[\frac{x^t - 1 - t}{t}\right] = \lim_{t\to 0} x \cdot \left[\frac{x^t \ell n\, x - 1}{1}\right] \text{ (derivando-se em relação a t)}$$

$$\Rightarrow f(x) = x(\ell nx - 1)$$

Logo $f(e^2) = e^2\,(\ell n\, e^2 - 1) = e^2 \cdot (2 - 1) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad f(e^2) = e^2$

7ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

C é matriz singular $\Longrightarrow$ $|C| = 0$

mas

$$|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} = 0$$

mas

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{c_{11}} & \frac{1}{c_{12}} \\ \frac{1}{c_{21}} & \frac{1}{c_{22}} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_{11}} \cdot \frac{1}{c_{22}} - \frac{1}{c_{21}} \cdot \frac{1}{c_{12}}$$

$$\Longrightarrow |A| = \frac{c_{21} \cdot c_{12} - c_{11} \cdot c_{22}}{c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{12} \cdot c_{21}} = 0$$

$\Longrightarrow$ A é matriz singular

$\Longrightarrow$ A não admite inversa

$\Longrightarrow$ não existe a matriz B

$\Longrightarrow$ não existe a matriz D

8ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

Numa vizinhança de -2: $m(x) = 7 - x$.

Assim:

$$|m(x) - m(-2)| = |7 - x - 9| = |-x - 2| = |x + 2|.$$

Finalmente:

$$|x - (-2)| = |x + 2| < 0{,}01 \Longrightarrow |m(x) - m(-2)| < 0{,}01,$$

isto é: $\delta = \varepsilon = 0{,}01$.

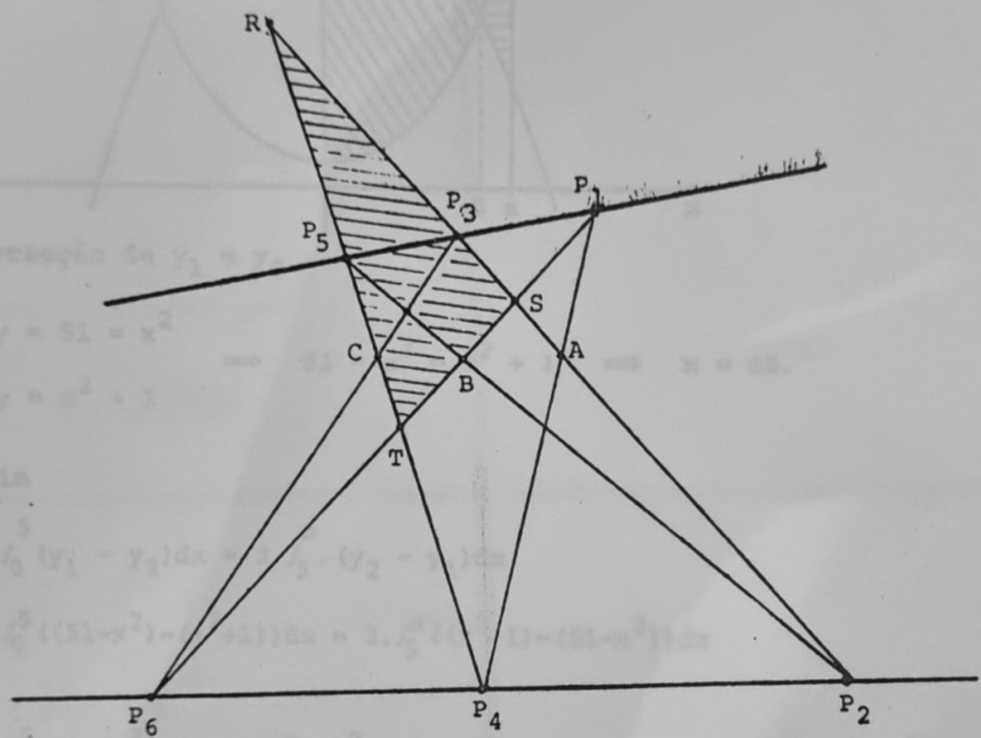
ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

Fazendo $P_2P_3 \cap P_4P_5 = \{R\}$

$P_2P_3 \cap P_1P_6 = \{S\}$, e

$P_4P_5 \cap P_1P_6 = \{T\}$, vem:



Aplicando Menelaus ao ΔRST, considerando os pontos colineares indicados, vem:

P_6, C e P_3: $TC \cdot SP_6 \cdot RP_3 = TP_6 \cdot SP_3 \cdot RC$ (1)

P_2, B e P_5: $TP_5 \cdot SB \cdot RP_2 = TB \cdot SP_2 \cdot RP_5$ (2)

P_1, A e P_4: $TP_4 \cdot SP_1 \cdot RA = TP_1 \cdot SA \cdot RP_4$ (3)

P_2, P_4 e P_6: $TP_6 \cdot RP_4 \cdot SP_2 = TP_4 \cdot RP_2 \cdot SP_6$ (4)

P_1, P_3 e P_5: $TP_1 \cdot RP_5 \cdot SP_3 = TP_5 \cdot RP_3 \cdot SP_1$ (5)

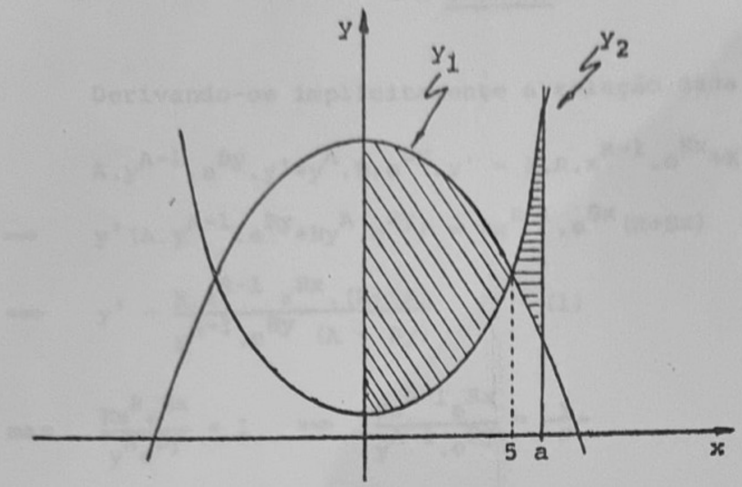
Multiplicando as equações de (1) a (5) termo a termo e simplificando, vem:

$$TC \cdot SB \cdot RA = TB \cdot SA \cdot RC,$$

ou seja, A, B e C estão alinhados.

10ª QUESTÃO

SOLUÇÃO



Interseção de y_1 e y_2

$$\begin{cases} y = 51 = x^2 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad 51 - x^2 = x^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 5.$$

Assim

$$\int_0^5 (y_1 - y_2)dx = 3 \int_5^a (y_2 - y_1)dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^5 ((51-x^2)-(x^2+1))dx = 3.\int_5^a ((x^2+1)-(51-x^2))dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^5 (50-2x^2)dx = 3.\int_5^a (2x^2-50)dx$$

$$\Longrightarrow \quad 50x - \frac{2x^3}{3}\Big]_0^5 = 3.(\frac{2x^2}{3} - 50x)\Big]_5^a$$

$$\Longrightarrow \quad 3a^3 - 225a + 500 = 0.$$

Definindo-se $p(a) = 3a^3 - 225a + 500$

temos que

$$p(3) = -94 < 0$$
$$p(0) = 500 > 0$$
$$p(5) = -250 < 0$$
$$p(8) = 236 > 0$$

como do enunciado temos que $a > 5$, o valor desejado é a raiz da equação acima que se encontra entre 5 e 8.

RESPOSTA:

$5 < a < 8.$

11ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

Derivando-se implicitamente a relação dada temos:

$$A.y^{A-1}.e^{By}.y'+y^{A}.B.e^{By}.y' = K.R.x^{R-1}.e^{Sx}+K.x^{R}.S.e^{Sx}$$

$$\Longrightarrow \quad y'(A.y^{A-1}.e^{By}+By^{A}.e^{By}) = Kx^{R-1}.e^{Sx}(R+Sx)$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{K.x^{R-1}.e^{Sx}.(R+Sx)}{y^{A-1}.e^{By}\ (A + By)} \qquad (1)$$

mas $\dfrac{Kx^{R}e^{Sx}}{y^{A}e^{By}} = 1 \Longrightarrow \dfrac{Kx^{R-1}e^{Sx}}{y^{A-1}.e^{By}} = \dfrac{y}{x}$

logo de (1) temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(R+Sx)}{x(A+By)} .$$

12ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

$z_n = x_{2kn} \cdot y_{2kn}$

logo

$$|z_m-z_n| = |x_{2km}\cdot y_{2km}-x_{2kn}\cdot y_{2kn}| =$$

$$= |x_{2km}\cdot y_{2km}-x_{2km}\cdot y_{2kn}+x_{2km}\cdot y_{2kn}-x_{2kn}\cdot y_{2kn}| \leq$$

$$\leq |x_{2km}\cdot y_{2km}-x_{2km}\cdot y_{2kn}|+|x_{2km}\cdot y_{2kn}-x_{2kn}\cdot y_{2kn}| =$$

$$= |x_{2km}|\cdot|y_{2km}-y_{2kn}|+|y_{2kn}|\cdot|x_{2km}-x_{2kn}| \leq$$

$$\leq |x_{2km}|.((2km)^{-1}+(2kn)^{-1})+|y_{2kn}|.((2km)^{-1}+(2kn)^{-1}) =$$

$$= ((2km)^{-1}+(2kn)^{-1}).(|x_{2km}|+|y_{2kn}|)$$

daí temos que

$$|z_m-z_n| \leq \frac{(m^{-1}+n^{-1})}{2k} . (|x_{2km}|+|y_{2kn}|) \qquad (1)$$

ma se e regular tem-se que

$t_r - t\,| < \frac{1}{n} + 1 < 2$

$\Rightarrow t_n\ |t\ | \leq t_n - t_1| \leq 2$

$\Longrightarrow |\cdot_n| \leq |t_1| + 2 \leq k_t$

logo

$$\left.\begin{array}{l} |x_{2km}| - x \leq k \\ |y_{2kn}| \quad y \leq k \end{array}\right\} \Longrightarrow |x_{2km}|\ |y_{2kn}| \leq 2k$$

assim de (1) temos

$$|z_m - z_n| \leq \frac{m^{-1} + -}{2k} \quad 2k$$

$$\Longrightarrow |z_m - z_n| \leq m^{-1} + n^{-1}$$

$\Longrightarrow z_n$ é r gu r.

RESPOSTA:

Demonstração