IME – CEE 76/77	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	Fl. 1 / 10

1a. QUESTÃO:	ÍTEM 1	VALOR: 0,5

ENUNCIADO:

Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine o conjunto A onde $A \subset \mathbb{R}$, domínio definição da função f, onde

$$f: x \longmapsto \log_2(x^2 - x - 1)$$

SOLUÇÃO

$$\exists \log_2 (x^2 - x - 1) \iff x^2 - x - 1 > 0$$

cujas raizes são $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Logo $\quad x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad x > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Então

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

1a. QUESTÃO:	ÍTEM 2	VALOR: 0,5

ENUNCIADO:

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \det \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ e^x & x \end{pmatrix}$$

Desenvolva a função f dada, em torno da origem, com uso da Fórmula de Taylor até o termo de segundo grau em x.

SOLUÇÃO

$$f(x) = \begin{vmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ e^x & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = x \text{ sen } x - e^x \cos x$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) x + \frac{f''(0)}{2} x^2$$

$$f(0) = 0 - e^0 \cos 0 = -1$$

$$f'(x) = x \cos x + \text{sen } x - e^x(-\text{sen } x) - e^x \cos x$$

$$f'(0) = 0 + 0 + 0 - 1 = -1$$

$$f''(x) = -x \text{ sen } x + \cos x + \cos x + e^x \cos x + e^x \text{ sen } x + e^x \text{ sen } x - e^x \cos x = -x \text{ sen } x + 2 \cos x + 2 e^x \text{ sen } x$$

$$f''(0) = 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 - 1 = 2$$

$$f(x) \simeq -1 - x + x^2$$

2a. QUESTÃO: ITEM ÚNICO VALOR: 0,5

ENUNCIADO:

Sejam x_1 e x_2 raízes da equação $x^2 - (a + d)\, x + ad - bc = 0$ onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Determine A de modo que x_1^3 e x_2^3 sejam raízes da equação: $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3\, bcd)y + A = 0$

SOLUÇÃO

Sabe-se que $\begin{cases} x_1 + x_2 = a + d \\ x_1 \; x_2 = ad-bc \end{cases}$

Na 2a. equação se tem:

$$a^3 + d^3 + 3abc + 3\, bcd = a^3 + d^3 + 3(a+d)\, bc = (a+d)^3 - 3(a+d)\,(ad-bc) = (x_1+x_2)^3 - 3(x_1+x_2)\,(x_1\, x_2) = x_1^{\,3} + x_2^{\,3}$$

Para que x_1^3 e x_2^3 sejam as raizes da 2a. equação basta, então, que $A = x_1^3\, x_2^3 = (x_1\, x_2)^3 = (ad - bc)^3$.

$$\begin{array}{r l}
 & ad - bc \\
 & ad - bc \\ \hline
 & a^2d^2 - abcd \\
 & \quad - abcd + b^2c^2 \\ \hline
 & a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\
 & a\;d \quad -bc \\ \hline
 & a^3d^3 - 2a^2bcd^2 + ab^2c^2d \\
 & \quad - a^2bcd^2 + ab^2c^2d - b^3c^3 \\ \hline
 & a^3d^3 - 3a^2bcd^3 + 3ab^2c^2d - b^3c^3
\end{array}$$

3a. QUESTÃO: | ITEM ÚNICO | VALOR: 1,0

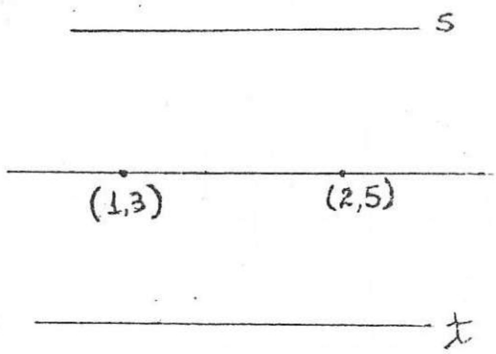
ENUNCIADO:

Sejam A, B $\in \mathbb{R}^2$ de coordenadas cartesianas (2,5) e (1,3), vértices fixos de um conjunto de triângulos de área 12. Determine a equação do lugar geométrico do conjunto de pontos C, terceiro vértice destes triângulos.

OBSERVAÇÃO: A área é considerada positiva qualquer que seja a orientação do triângulo, de acordo com a definição axiomática.

SOLUÇÃO

A equação da reta r que liga os pontos (1,3) e (2,5) é: $y = 2x + 1$



Da fórmula $S = \dfrac{b \times h}{2}$

onde

$b = \sqrt{5}$ é a distância entre os pontos (1,3) e (2,5)

Basta que se determine as duas retas s e t paralelas à reta r e a uma distância de $h = \dfrac{24\sqrt{5}}{5}$, obtida de $12 = \dfrac{\sqrt{5}\,h}{2}$

Sejam as retas paralelas S: $y = 2x+k$ e t: $y = 2x+h$

$$\frac{2x - (2x+k) + 1}{\sqrt{5}} = \frac{24\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow \frac{-k+1}{\sqrt{5}} = \frac{24\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow k = -23$$

$$\frac{2x - (2x+h) + 1}{-\sqrt{5}} = \frac{24\sqrt{5}}{5} \qquad \frac{-h+1}{-\sqrt{5}} = \frac{24\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow h = 25$$

S: $y = 2x - 23$ ou $\begin{cases} 2x - y - 23 = 0 \\ 2x - y + 25 = 0 \end{cases}$

t: $y = 2x+25$

ou ainda $(2x-y-23)(2x-y+25) = 0$

4a. QUESTÃO: ITEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Seja $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

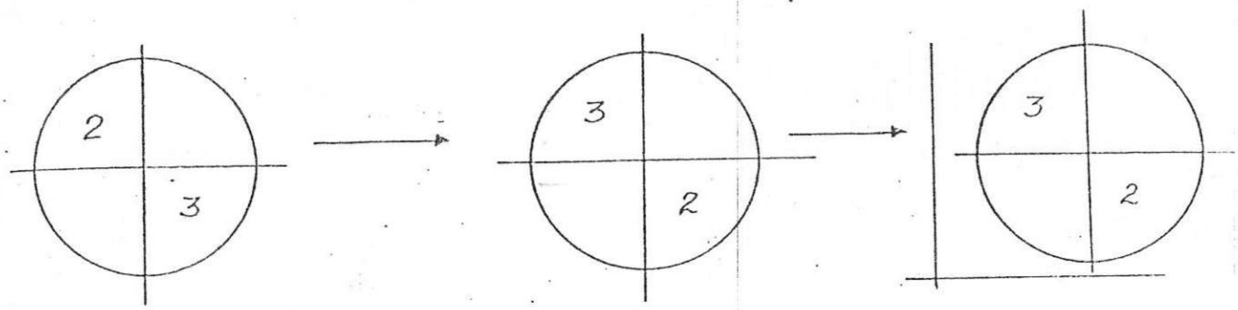
$z \longmapsto iz + 2 + 3i$

Seja o conjunto $A = \{ x + iy \in \mathbb{C} \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \}$

Determine o conjunto B imagem de A pela função f.

SOLUÇÃO

A é elipse de vértices (3,0), (-3,0), (0,2) e (0,-2)



f (A) fazem uma rotação de $\pi/2$ e a seguir uma translação de razão 2+3i = (2,3)

Logo, se obtém a elipse: $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

Argumentos algébricos:

Explicita-se a função: $f(z) = iz + 2 + 3i$

$z = x + iy = (x,y)$ $\qquad f(z) = -y + 2 + i\,(x + 3)$

$f(x,y) = (-y + 2,\ x + 3)$

Obtém-se a imagem do centro e dos vértices

$f(0,0) = (2,3)$ novo centro de elipse

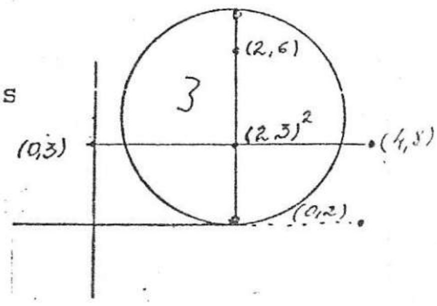
$f(3,0) = (2,6)$

$f(-3,0) = (2,0)$

$f(0,2) = (0,3)$

$f(0,-2) = (4,3)$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$



5a. QUESTÃO: ITEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

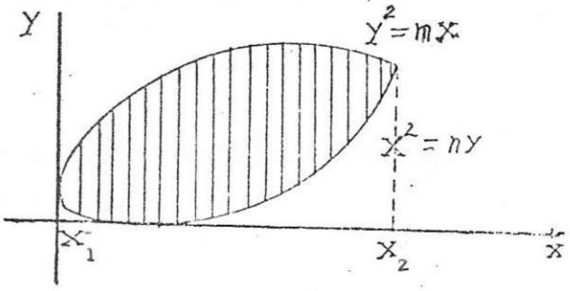
Sejam as regiões definidas pelos conjuntos de pontos A e B onde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < mx,\ m \in \mathbb{R}^+\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < ny,\ n \in \mathbb{R}^+\}$$

Determine a área do conjunto $C = A \cap B$.

SOLUÇÃO



$$y^2 = mx$$

$$x^2 = ny$$

$$y^2 = mx$$

$$x^4 = n^2y^2 \qquad x^4 = mn^2x$$

$$x^4 - mn^2x = 0$$

$$x(x^3 - mn^2) = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$x_2 = \sqrt[3]{mn^2}$$

$$A = \int_0^{x_2} \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{n}\right) dx = \int_0^{x_2} \sqrt{mx}\, dx - \frac{1}{n} \int_0^{x_2} x^2\, dx$$

$$\sqrt{m}\ \frac{x^{3/2}}{3/2} \Bigg|_0^{m^{1/3}n^{2/3}} - \frac{1}{n}\ \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^{m^{1/3}n^{2/3}}$$

$$A = \frac{2}{3}\ m^{1/2}\ m^{1/2}\ n - \frac{1}{n}\ \frac{m}{3}\ n^2$$

$$A = \frac{2}{3} mn - \frac{1}{3} mn = \frac{mn}{3}$$

$$A = \frac{mn}{3}$$

6a. QUESTÃO: ITEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Sendo $x \in \mathbb{R}$, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[x^2]{\cos x}$$

SOLUÇÃO

Quer se determinar

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[x^2]{\cos x}$$

Tem-se $\sqrt[x^2]{\cos x} = \cos x^{1/x^2}$ e $\lim\limits_{x \to 0} \cos x^{1/x^2} = 1^{\infty}$,

que é indeterminado.

Fazendo $(\cos x)^{1/x^2} = y$ e tomando logaritmos tem-se:

$$\log y = \frac{1}{x^2} \log(\cos x) = \frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

e $\lim\limits_{x \to 0} (\log y) = \frac{0}{0}$ que dá outra indeterminação, que pode ser levantada pela regra de L'Hopital:

Temos $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\log(\cos x)}{x^2}$ e $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = \frac{0}{0}$$ indeterminação.

Porém :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}$$

logo $\log y = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad y = e^{-1/2} = \dfrac{1}{e^{1/2}}$

IME – CEE 76 / 77	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	Fl. 7 / 10
7a. QUESTÃO:	ITEM ÚNICO	VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Seja a, b ε $\mathbb{R}^+$. Mostre que a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0$$

possue todas suas raízes reais, sendo uma no intervalo $]-b, 0[$ e a outra no intervalo $]0, a[$

SOLUÇÃO

Efetuando-se, obtêm-se equação na forma

$$3x^2 - 2(a+b)\,x + ab = 0 \qquad \text{onde } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0$$

O discriminante $\Delta = 4(a^2 + 2ab + b^2) - 12\,ab$

$\Delta = 4(a^2 + b^2 - ab) \neq 0$ daí as duas raizes são reais. $\Delta = 4(a^2 - ab + b^2)$

$f(-b) = 3b^2 - 2(a+b)\,(-b) + ab = \cancel{b(a+b) > 0} \Rightarrow 5b^2 + 3ab > 0$

$f(0) = +\,ab > 0 \rightarrow$

$f(a) = 3a^2 - 2(a+b)\,(a) + ab = \cancel{a(a+b) < 0} \Rightarrow a(a-b)$ → não se pode afirmar o sinal.

Logo pelo teorema do valor intermediário existe x_1 entre $-b$ e 0, tal que $f(x_1) = 0$ e existe x_2 entre 0 e a tal que $f(x_2) = 0$.

Teorema de Bolzano: $\exists\, x_1 \in \mathbb{R} \;\Big|\; \begin{cases} f(x_1)=0 \\ -b<x_1<0 \end{cases}$ pois $f(-b)\cdot f(0) < 0$ (Nº ímpar de raízes)

$\exists\, x_2 \in \mathbb{R} \;\Big|\; \begin{cases} f(x_2)=0 \\ 0<x_2<a \end{cases}$ pois $f(0)\cdot f(a) < 0$ (Nº ímpar de raízes)

→ Falso. O teorema acima não é obedecido.

Esta questão deveria ser:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+b} = 0$$

$\boxed{\text{SOLUÇÃO:}}$

Equação $\Rightarrow 3x^2 - 2(a-b)x - ab = 0$

$\Delta = 4(a-b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-ab) = 4(a^2+ab+b^2) > 0$

$\rightarrow$ Há duas raízes reais e distintas.

$\rightarrow f(-b) = 3b^2 - 2(a-b)(-b) - ab = b(a+b) > 0$

$\rightarrow f(0) = -ab < 0$

$\rightarrow f(a) = 3a^2 - 2(a-b)a - ab = a(a+b) > 0$

$\rightarrow f(0) \cdot f(-b) < 0 \rightarrow \exists\, x_1 \in \,]-b, 0[\ \mid P(x_1) = 0$ (Bolzano)

$\rightarrow f(0) \cdot f(a) < 0 \rightarrow \exists\, x_2 \in \,]0, a[\ \mid P(x_2) = 0$ (Bolzano)

8a. QUESTÃO: ITEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Divide-se um quadrado de lado 1 em nove quadrados iguais e remove-se o quadrado central. Procede-se da mesma forma com os 8 quadrados restantes. Este processo é realizado n vezes.

a) Quantos quadrados de lado $1/3^n$ são conservados?

b) Qual a soma das áreas dos quadrados removidos quando n tende a infinito?

SOLUÇÃO

Após 1º passo permanecem 8 quadrados; cada um de lado igual a 1/3.

Após 2º passo permanecem $8.9 - 8 = (9-1)8 = 8^2$ quadrados cada um de lado igual a $1/3^2$.

Após 3º passo permanecem $8^2.9-8^2 = 8^2(9-1) = 8^3$ quadrados cada um de Lado igual a $1/3^2$.

Logo, depois de n vezes repetido o processo, permanecem total de 8^n quadrados, cada um de lado igual a $1/3^n$.

Conseqüentemente a soma das áreas dos quadrados que permanecem após n repetições do processo é igual a:

$$8^n\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{8^n}{(3^2)^n} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Daí, a soma das áreas dos quadrados removidos é igual à área total Menos a soma das áreas dos quadrados que permanecem, ou seja:

$$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n. \text{ Como } \frac{8}{9} < 1, \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right] = 1$, Que é a soma das áreas dos quadrados removidos.

IME – CEE 76 / 77	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	Fl. 9 / 10
9a. QUESTÃO	ITEM ÚNICO	VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

São dados n pontos em um plano, supondo-se:

a) Cada três pontos quaisquer não pertencem a uma mesma reta;

b) Cada par de retas por eles determinado não é constituído por retas paralelas;

c) Cada três retas por eles determinadas não passam por um mesmo ponto.

Pede-se o número de interseções das retas determinadas por esses pontos distintos dos pontos dados.

SOLUÇÃO

Numa reta haverá tantas interseções quantas forem as retas determinadas pelos pontos restantes.

Logo $C_{n-2}^{2} = \binom{n-2}{2}$

Como com os pontos dados podemos determinar

$C_{n}^{2} = \binom{n}{2}$ Retas

O número total de pontos será

$C_{n}^{2} \cdot C_{n-2}^{2}$

Só que com este raciocínio cada ponto é contado 2 vezes

Resp. $\frac{1}{2} C_{n}^{2} \; C_{n-2}^{2}$

$$\frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(n-2)\;(n-3)}{2} = \frac{n(n-1)\;(n-2)\;(n-3)}{8}$$

Resp. $\frac{n(n-1)\;(n-2)\;(n-3)}{8}$

$(n^{2}-3n)\;(n^{2}-3n+2) = n^{4}-6n^{3}+11\;n^{2}-6n$

IME – CEE 76/77	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	Fl. 10 / 10

10a. QUESTÃO: ITEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Seja $P_3(x) = (x+1)\ (x+3)\ (x+5) + k(x+2)\ (x+4)$, onde $x \in \mathbb{C}$. Determine o lugar geométrico das raízes de $P_3(x)$ quando k assume todos os valores em R^+, desenhando este lugar geométrico no plano complexo.

SOLUÇÃO

$$P_3(x) = (x+1)\ (x+3)\ (x+5) + K\ (x+2)\ (x+4) = 0$$

Trata-se de eq. 3º grau coeficientes reais; logo ao menos uma raíz real

$$\frac{(x+2)\ (x+4)}{(x+1)\ (x+3)\ (x+5)} = -\frac{1}{k}$$

é um complexo em que

$$\left|\frac{(x+2)\ (x+4)}{(x+1)\ (x+3)\ (x+5)}\right| = \frac{1}{k}$$

DESNECESSÁRIO

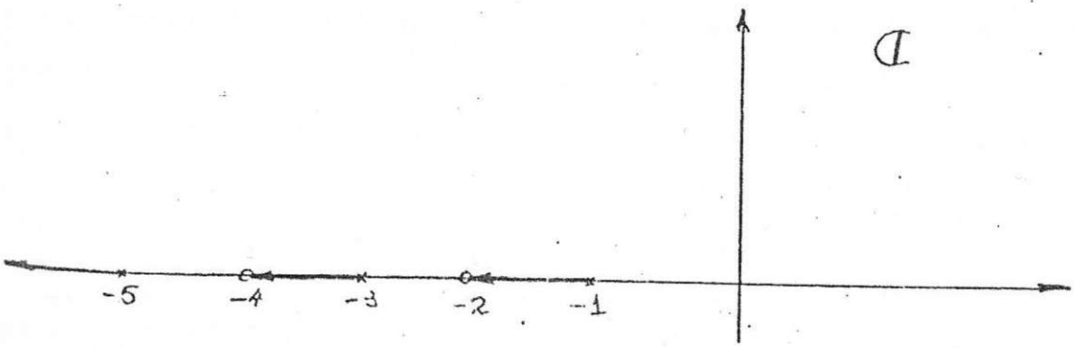
$$\frac{(x+2)\ (x+4)}{(x+1)\ (x+3)\ (x+5)} = -\bar{N} + 2n\bar{N} \qquad n \in Z \qquad \text{que}$$

define o lugar geométrico.

Para K=0 as raizes são -1, -3, -5

Para K≠0 as raizes são -2; -4, e outra a determinar ← (F)

Examinando a condição de fase sobre o eixo real encontram-se os 3 lugares em vermelho, logo as raizes são sempre reais.



$(x+1)(x+3)(x+5) =$

$= (x^2+4x+3)(x+5) = x^3+4x^2+3x+5x^2+20x+15 = x^3+9x^2+23x+15$

$k(x+2)(x+4) = k(x^2+6x+8) = kx^2+6kx+8k$

$\rightarrow P_3(x) = x^3+(k+9)x^2+(23+6k)x+(8k+15) = 0$

$\forall\ x>0 \rightarrow$ NÃO HÁ $k>0$ $\rightarrow$ NÃO É RAIZ

Se $x=0 \rightarrow$ NÃO HÁ $k>0$ $\rightarrow$ NÃO É RAIZ

$\rightarrow x<0$ //

Se $k=0$, as raízes são $-1, -3$ e -5.

Se $k \neq 0 \rightarrow$
$\left.\begin{array}{l} P(-1)>0 \\ P(-2)<0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Há uma raiz entre -2 e -1

$\left.\begin{array}{l} P(-3)<0 \\ P(-4)>0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Há uma raiz entre -4 e -3

$\left.\begin{array}{l} P(-5)>0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Há uma raiz menor do que -5

Bolzano