IME - CEE - 1975 | ÁLGEBRA | 01

1a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: A soma dos 50 primeiros têrmos de uma Progressão Aritimética é igual a 200 e a soma dos 50 seguintes é igual a 2700. Calcule a razão da progressão e seu primeiro têrmo.

2a. QUESTÃO - (1,0 ponto)

ENUNCIADO: Considere a família de curvas C, definida pela equação:

$$y = x^2 - 2(n-5)x + n + 1$$

ITEM A - (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Sabendo que a curva intercepta o eixo x'x em dois pontos, determine os valores que pode assumir.

ITEM B - (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Determine a equação do LUGAR GEOMÉTRICO dos vértices das curvas da família C, apresentando um esboço deste LUGAR GEOMÉTRICO.

3a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Considere o conjunto dos números reais R e o conjunto dos números complexos C. Sabendo que $a \in R$, $b \in R$, $z_1 \in C$, $z_2 \in C$ que

$z_1^2 + az_1^2 + b = 0$, a, $z_2^2 + az_2^2 + b = 0$, determine a relação $r = \dfrac{a^2}{b}$ para que os pontos z_1, z_2 e z_0 (0,0) do plano complexo formem um triângulo equilátero, esboçando as soluções no plano complexo.

OBSERVAÇÕES: z_0 (.0) é a origem, no plano complexo.

O símbolo "ε" significa "pertence".

4a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Dado o polinômio $2x^4 + x^3 + px^2 + qx + 2$, determine p e q de modo que ele seja divisível por $(x-1)^2$.

5a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Dada a equação:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^{(1-n)y^3} = b$$

onde é um número real que 1, calcule todos os valores reais ou complexos de Y que satisfazem a essa equação, sabendo-se que a^4 é média entre $(1+b)$ e $\left(\dfrac{1}{b}\right)$.

6a. QUESTÃO ITEM A

Valor 0,5

ENUNCIADO: Dada a equação: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ determine a relação entre os seus coeficientes para que a soma de duas raízes seja igual à soma das outras duas.

IME - CEE - 1975	ÁLGEBRA	02

7a. QUESTÃO - (1,0)

ENUNCIADO: São dados os conjuntos $E = \{ a, b, c, d \}$ e $F \subset E$, tal que $F = \{ a,b\}$. Denote por P (E) o conjunto das partes de E considere, em P(E), a RELAÇÃO R, tal que

$$X \; R \; Y \longleftrightarrow F \cap X = F \cap Y$$

ITEM A - (0,4 Pontos)

ENUNCIADO: Verifique se R é uma RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA:

ITEM B - (0,3 Pontos)

ENUNCIADO: $Z \overset{\smile}{\subset} P(E)$. Determine Z, sabendo-se que $Z \cap F = \{ b \}$

ITEM C - (0,3 Pontos)

ENUNCIADO: $\forall \subset$ P(E). Determine $\forall$, sabendo-se que $F \cap \forall = \emptyset$

OBSERVAÇÕES: P(E) tem 16 elementos. Significa "Se e somente se"

8a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Considere $y = \dfrac{x(x + 1)}{x^2 + 1}$ Determine os pontos de máximo, de mínimo, de inflexão, as suas assíntotas e verifique se os pontos de inflexão pertencem a uma mesma reta, apresentando, em caso afirmativo, a equação desta reta. Faça um esboço da função indicando os pontos e retas acima aludidos.

9a. QUESTÃO ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Considere as Progressões Geométrica e Aritmética abaixo, as quais se prolongam indefinidamente dos dois sentidos:

$$\ldots : a^{-\frac{2m}{4}} : a^{-\frac{m}{4}} : a^{0} : a^{\frac{m}{4}} : a^{\frac{2m}{4}} : \ldots$$

$$\ldots \; . \; \left(1 - \frac{5m}{4}\right) . \left(1 - \frac{3m}{4}\right) . \left(1 - \frac{m}{4}\right) . \left(1 + \frac{m}{4}\right) . \left(1 + \frac{3m}{3}\right) \ldots .$$

Verifique se elas podem definir o núcleo de um sistema de logarítimos. Em caso negativo, justifique a resposta. Em caso afirmativo, determine a base do sistema.

10a. QUESTÃO ITEM ÚNICO:

Valor 1,0

ENUNCIADO: Determine quantos números M existem satisfazendo simultaneamente as seguintes condições

1) $10^6 < M < 10^7$;

2) o algarismo 4 aparece menos 2 vezes em M;

3) o algarismo 8 aparece pelo menos 3 vezes em M .

OBESERVAÇÃO: Os números M são inteiros escritos na base 10.

IME - CEE - 1975	RESOLVIDO	ÁLGEBRA	01

1ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \times 50}{2} = 200 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow 2a_1 + 49r = 8 \dots \quad (1)$$

$$a_{51} + a_{52} + \dots + a_{100} \longleftrightarrow \frac{(a_{51} + a_{100}) \times 50}{2} = 2700 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow 2a_1 + 149r = 108 \dots (2)$$

$$(1) \text{ e } (2) \longrightarrow 100r = 100 \longleftrightarrow \boxed{r = 1} \quad \dots (3)$$

$$(1) \text{ e } (3) \longrightarrow 2a_1 + 49 = 8 \longleftrightarrow \boxed{a_1 = -20,5}$$

2ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

- ITEM A -

Do enunciado, $\Delta > 0$:

$$\Delta = 4(m-5)^2 - 4(m+1)$$
$$= 4[m^2 - 11m + 24].$$

Logo $\Delta = 0 \longleftrightarrow m^2 - 11m + 24 = 0 \longleftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ \text{ou} \\ m = 8 \end{cases}$

Então $\Delta > 0 \longleftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ \text{ou} \\ m > 8 \end{cases}$

2ª QUESTÃO

- ITEM B -

- Equação do Lugar Geométrico.

Designando por $V(x,y)$ o vértice das curvas, vem:

$$x = -\frac{b}{2a} = m - 5 \qquad \ldots (1)$$

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -(m^2 - 11m + 24) \qquad \ldots (2)$$

De (1), temos:

$$m = x + 5 \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (2), vem:

$$y = -\left[(x+5)^2 - 11(x+5) + 24\right]$$

$$\boxed{y = -x^2 + x + 6} \qquad \underline{\text{Parábola}}$$

- Esboço do Lugar Geométrico - Parábola.

(i) Vértice:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{25}{4}$$

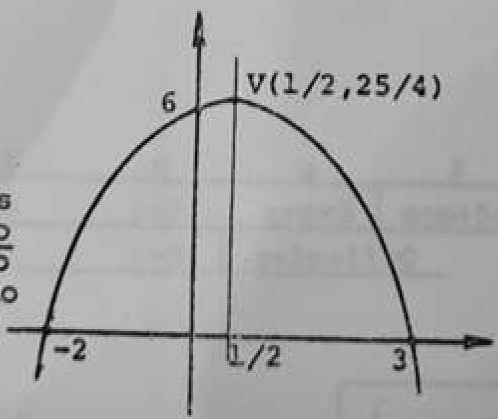
(ii) Zeros:

$$-x^2 + x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = 3$$

(iii) Interseção com Oy:

$$x = 0 \rightarrow y = 6$$

(iv) Esboço:



OBS.: Caso restrinjamos a família C aos valores de m do ITEM A, o LG será a parábola ao lado restrita ao semi-plano $y < 0$.

3ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

Subtraindo-se uma equação da outra, obtemos:

$$(z_1^2 - z_2^2) + a.(z_1^2 - z_2^2) = 0$$

$$(z_1^2 - z_2^2)(a + 1) = 0 \iff$$

(i) $a = -1$

(ii) $z_1^2 = z_2^2$

Se $a = -1$ então $b = 0$, logo não existe r.

Se $z_1^2 = z_2^2$ é impossível formarem 60^o.

Logo com az_1^2 e az_2^2 a questão não tem solução.

4ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

	2	1	p	q	2
1	2	3	p+3	q+p+3	q+p+5=0
1	2	5	p+8	q+2p+11=0	

$$\begin{cases} q + p + 5 = 0 \\ q + 2p + 11 = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} p = -6 \\ q = 1 \end{cases}}$$

5ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(i) Do enunciado

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^{(1-n)y^3}\text{; } a > 1 \text{ e } a^8 = \frac{1+b}{b}.$$

(ii) Assim

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^{(1-n)y^3} = a^{-y^3} + a^{-2y^3} + a^{-3y^3} + \ldots = b$$

é o limite da soma dos termos de uma P.G. de razão $q = a^{-y^3} = a_1$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^{-y^3}}{1 - a^{-y^3}} = \frac{1}{a^{y^3} - 1} = b;\ y^3 > 0.$$

(iii) Efetuando

$$(a^{y^3} - 1)b = 1 \iff b.a^{y^3} - b = 1 \iff$$

$$\iff b.\left(\frac{1+b}{b}\right)^{\frac{1}{8}.y^3} - b = 1 \iff \left(\frac{1+b}{b}\right)^{\frac{y^3}{8}} = \frac{1+b}{b} \iff$$

$$\iff y^3 = 8 \iff y = \sqrt[3]{8\operatorname{cis}\theta} \iff y = 2 \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{3}$$

(iv) Fazendo k = 0, 1, 2

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 + \sqrt{3}\, i \\ y_3 = -1 - \sqrt{3}\, i \end{cases}$$

6ª QUESTÃO - ITEM A

SOLUÇÃO

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\begin{cases} x + y = z + w & \dots (1) \\ x + y + z + w = -a & \dots (2) \\ xy + xz + xw + yz + yw + zw = b & \dots (3) \\ xyz + xyw + xzw + yzw = -c & \dots (4) \\ xyzw = d & \dots (5) \end{cases}$$

(i) Se $a \neq 0$

De (1) e (2)

$$\boxed{x + y = z + w = -\frac{a}{2}}$$

De (4)

$$xy(z + w) + zw(x + y) = -c$$

$$\boxed{xy + zw = \frac{2c}{a}}$$

De (3)

$$xy + x(z + w) + y(z + w) + zw = b$$

$$xy + zw + (z + w)(x + y) = b$$

$$xy + zw + \frac{a^2}{4} = b \longrightarrow \frac{2c}{a} + \frac{a^2}{4} = b$$

então $\boxed{8c + a^3 = 4ab}$

(ii) Se $a = 0 \longrightarrow c = 0$, logo a equação é uma biquadrada, e a soma de duas raízes é igual à soma de outras duas $(S = 0)$.

6ª QUESTÃO - ITEM B

SOLUÇÃO

$$\begin{cases} x + y = z + w = -3 \\ xy + zw = 4 \\ xyzw = -5 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{xyzw}_{-5} + (zw)^2 = 4(zw).$$

$$(zw)^2 - 4(zw) - 5 = 0 \longrightarrow \begin{matrix} zw = -1 & \text{(i)} \\ \text{ou} & \\ zw = 5 & \text{(ii)} \end{matrix}$$

$$\text{(i)} \begin{cases} z + w = -3 \\ zw = -1 \end{cases} \longrightarrow m^2 + 3m - 1 = 0 \longleftrightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\boxed{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}} \quad e \quad \boxed{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}}$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} z + w = -3 \\ zw = 5 \end{cases} \longrightarrow m^2 + 3m + 5 = 0 \longleftrightarrow m = \frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

$$\boxed{\frac{-3+i\sqrt{11}}{2}} \quad e \quad \boxed{\frac{-3-i\sqrt{11}}{2}}$$

7ª QUESTÃO

<u>SOLUÇÃO</u>

- <u>ITEM A</u> -

R é relação de equivalência sobre P(E).

(1) R é <u>reflexiva</u>:

$X \in P(E) \longrightarrow F \cap X = F \cap X \longrightarrow XRX$; logo,

$\forall X \in P(E)$, XRX, ou seja, R é <u>reflexiva</u>.

(2) R é <u>simétrica</u>.

$X, Y \in P(E)$ <u>e</u> $XRY \longrightarrow F \cap X = F \cap Y \longrightarrow$

$F \cap Y = F \cap X \longrightarrow YRX$; logo,

$\forall X, Y \in P(E)$, $XRY \longrightarrow YRX$, ou seja:

R é <u>simétrica</u>.

(3) R é <u>transitiva</u>.

$X, Y, Z \in P(E)$ <u>e</u> XRY <u>e</u> $YRZ \longrightarrow$

$F \cap X = F \cap Y$ <u>e</u> $F \cap Y = F \cap Z \longrightarrow$

$\longrightarrow F \cap X = F \cap Z \longrightarrow XRZ$; logo,

$\forall X, Y, Z \in P(E)$, XRY <u>e</u> $YRZ \longrightarrow XRZ$, ou

seja, R é <u>transitiva</u>.

- ITEM B - (0,3 pontos)

Se $Z \subset P(E)$, então Z é um CONJUNTO DE PARTES de E.
Logo não existe Z tal que $Z \cap F = \{b\}$.

- ITEM C - (0,3 pontos)

Se $W \subset P(E)$, então W é um CONJUTNO DE PARTES de E.
Logo qualquer $W \in P(E)$ satisfaz ao enunciado.

8ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

$y'(x),\quad x \in \mathbb{R} \Longrightarrow y$ é contínua sobre $\mathbb{R}$.

$$y = 1 + \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$

(i) VALORES EXTREMOS

$$y' = 0 \Longleftrightarrow -x^2+2x+1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1+\sqrt{2} \\ x_2 = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

$y''(1+\sqrt{2})<0 \Longrightarrow (1+\sqrt{2},(1+\sqrt{2})/2)$ é pt. de máximo

$y''(1-\sqrt{2})>0 \Longrightarrow (1-\sqrt{2},(1-\sqrt{2})/2)$ é pt. de mínimo

(ii) PONTOS DE INFLEXÃO

- Pontos Críticos

$y'' = 0 \Longleftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 6x + 2 = 0 \longrightarrow$

Por inspeção -1 é raiz $\boxed{x_3 = -1 \longrightarrow y(x_3) = 0}$

	1	-3	-3	+1
-1	1	-4	1	0

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_4 = 2+\sqrt{3} \rightarrow y(x_4) = \frac{3+\sqrt{3}}{4}} \\ \\ \boxed{x_5 = 2-\sqrt{3} \rightarrow y(x_5) = \frac{3-\sqrt{3}}{4}} \end{cases}$$

- Pesquisa

$$\left.\begin{array}{ll} -1 > x & \Rightarrow y'' < 0 \\ -1 < x < 2-\sqrt{3} & \Rightarrow y'' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1, 0) \text{ é ponto de inflexão}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3} & \Rightarrow y'' < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right) \text{ é ponto de inflexão}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2+\sqrt{3} < x & \Rightarrow y'' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right) \text{ é ponto de inflexão}$$

(iii) ASSÍNTOTAS

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} y/x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0 \quad ;$$

$$h = \lim_{x \to \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(x+1)}{x^2+1} = 1 \, .$$

Assíntota horizontal de equação $y = 1$.

(iv) COLINEARIDADE (reta $\underline{r}$ - vide gráfico)

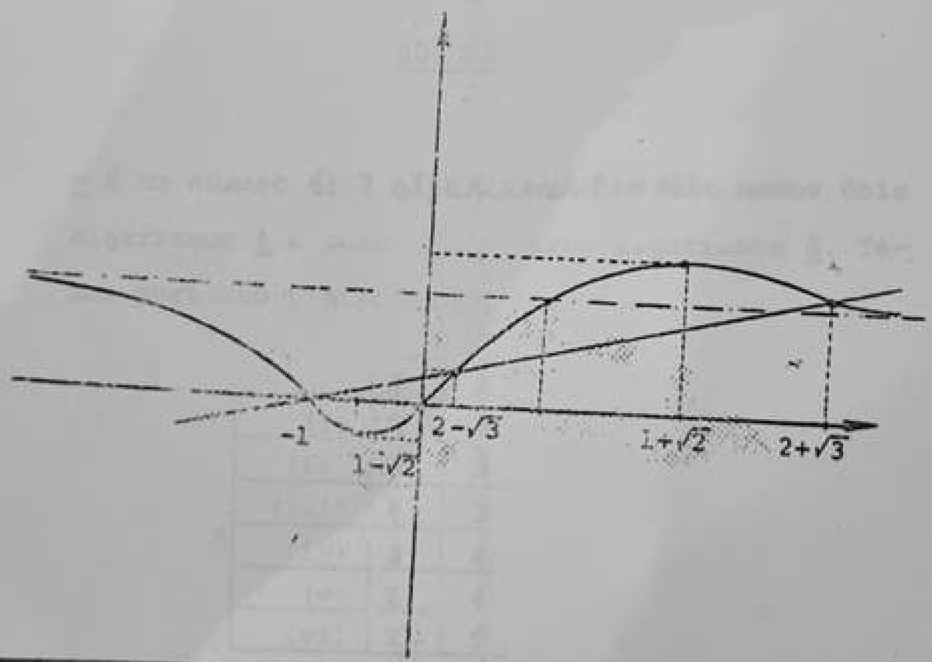
De fato:

$$\frac{y(2+\sqrt{3}) - y(-1)}{(2+\sqrt{3}) - (-1)} = \frac{1}{4} \qquad \underline{e}$$

$$\frac{y(2-\sqrt{3}) - y(-1)}{(2-\sqrt{3}) - (-1)} = \frac{1}{4}$$

Logo os pontos são colineares.

(v) GRÁFICO



9ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

9ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO - (1,0 ponto)

(i) Sim, podem. Basta que

$(1 - \frac{m}{4}) = 0 \iff \boxed{m = 4}$

OBS.: Não só para $m = 4$, como também para todo valor da forma

$$\boxed{m = \frac{4}{2n-1}} \quad , n \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Para $m = 4$

$$\ldots : a^{-2} : a^{-1} : 1 : a^{1} : a^{2} : \ldots$$

$$\ldots \; . \; -4 \; . \; -2 \; . \; 0 \; . \; 2 \; . \; 4 \; . \; \ldots$$

Portanto

$$\log_B a = 2 \Longrightarrow \boxed{B = \sqrt{a}}$$

10ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

m é um número de 7 algarismos com pelo menos dois algarismos 4 e pelo [illegible] três algarismos 8. Temos portanto 6 [illegible]

	4	3
(i)	2	3
(ii)	3	3
(iii)	4	3
(iv)	3	4
(v)	2	4
(vi)	2	5

(i) 4 4 8 8 8 __ __

$$C_7^5 \times P_5^{3,2} \times 8 \times 8 - C_6^5 \times P_5^{3,2} \times 8 = \underline{12.960}$$

(ii) 4 4 4 8 8 8 __

$$C_7^6 \times P_6^{3,3} \times 8 - P_6^{3,3} \; , = \underline{1100}$$

(iii) $\underline{4}\quad\underline{4}\quad\underline{4}\quad\underline{4}\quad\underline{8}\quad\underline{8}\quad\underline{8}$

$$P_7^{4,3} = \underline{35}$$

(iv) $\underline{4}\quad\underline{4}\quad\underline{4}\quad\underline{8}\quad\underline{8}\quad\underline{8}\quad\underline{8}$

$$P_7^{4,3} = \underline{35}$$

(v) $\underline{4}\quad\underline{4}\quad\underline{8}\quad\underline{8}\quad\underline{8}\quad\underline{8}\quad\underline{\quad}$

$$C_7^6 \times P_6^{4,2} \times 8 - P_6^{4,2} = \underline{825}$$

(vi) $\underline{4}\quad\underline{4}\quad\underline{8}\quad\underline{8}\quad\underline{8}\quad\underline{8}\quad\underline{8}$

$$P_7^{2,5} = \underline{21}$$

Portanto teremos no <u>total</u>

$$12.960 + 1.100 + 35 + 35 + 825 + 21 = 14.976$$

$$\boxed{\text{Total: } 14.976}$$