IME – ÁLGEBRA – 1973/1974
JS (4/12/73, pág. 10, 5/12/73, pág. 10, e 6/12/73, pág. 11)

1ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,6 pontos)

ENUNCIADO:

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{R}_0^+$ o subconjunto de $\mathbb{R}$ formado pelos reais positivos. Seja $f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bijetiva.

a) Determine f sabendo-se que:

$f(y^x) = xf(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+ \quad e \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(1) = \underline{e}$ onde $\underline{e}$ é a base dos logaritmos neperianos.

b) Calcule

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\, dx$$

1ª QUESTÃO
ITEM 2 (0,4 pontos)

ENUNCIADO:

Em uma pesquisa realizada entre 500 pessoas foram obtidos os seguintes dados:

200 pessoas gostam de música clássica;
400 pessoas gostam de música popular;
75 pessoas gostam de música clássica e de música popular.

Verifique a consistência ou inconsistência dos dados desta pesquisa.

2ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Seja $p(x)$ um polinômio a coeficientes reais de grau maior ou igual a 1 e $q(x) = 2x^2 + x$. Determine todos os possíveis máximos divisores comuns de $p(x)$ e $q(x)$.

2ª QUESTÃO
ITEM 2 (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Determine os parâmetros reais m, n, p de modo que as equações :

$$(m + 1)x^3 + (n - 2)x^2 - (m + n - p)x + 1 = 0$$

$$(m - 1)x^3 + (n + 2)x^2 - (m - n + p)x + 3 = 0$$

tenham as mesmas raízes.

3ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Dado um ponto fixo, A, sobre uma circunferência C, de raio r, determine o lugar geométrico das interseções das circunferências que têm por diâmetros duas cordas da circunferência C, perpendiculares entre si e que passam pelo ponto A.

4ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja Z o conjunto dos números inteiros e seja $Z_0 = Z - \{0\}$. Definimos uma relação D, sobre Z_0, por :

$$m \; D \; n \quad \text{se e somente se} \quad m \text{ divide } n.$$

a) Mostre que, se $a, b \in Z$, a relação E definida por :

$a \; E \; b$ se e somente se existe $m \in Z_0$ tal que

$b = a\,m$ e $m \; D \; 1$,

é uma relação de equivalência sobre Z.

b) Seja Z_0^+ o conjunto dos números inteiros positivos.

Se $n \in Z_0^+$, mostre que qualquer n - ésima raiz da unidade é uma m - ésima raiz primitiva da unidade para exatamente um $m \in Z_0$ tal que $m \; D \; n$.

5ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Para cada inteiro $k \geq 0$ seja

$f_k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que :

$$f_0(x) = x + \ln(\sqrt{x^2+1} - x), \; \forall x \in \mathbb{R}$$

e se $k > 0$, $f_k(x) = \dfrac{x + \ln(\sqrt{x^2+1} - x)}{x^k}, \; \forall x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$

e $f_k(0) = a$

a) Desenvolva $f_0(x)$ em série de potências de x até o termo de quarta ordem

b) Determine os valores de k para os quais $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x)$ existe e é finito e calcule os valores de $\underline{a}$ de modo que f_k seja contínua.

6ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja $f(a, b, c, d) = c - a - 3b + 3d$ onde a, b, c, d são números reais.

a) Dadas as matrizes quadradas A, B, C tais que :

(i) $A \cdot B = I$, onde I é a matriz identidade ;

(ii) B é uma matriz triangular cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1, exceto um deles que vale 2 ;

(iii) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 4 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

Mostre que, se $|A|$ e $|C|$ denotam os determinantes de A e C , então :

$$f(a, b, c, d) = |A| \cdot |C|$$

b) Mostre que $f(a, b, c, d) = 0$ é condição necessária e suficiente para que exista um polinômio $p(x)$ com coeficientes reais, de grau menor ou igual a 2 e tal que $p(-1) = a$, $p(1) = b$, $p(2) = c$, $p(0) = d$

7ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja a equação geral do 2º grau em duas variáveis :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Prove que o determinante :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

é invariante por mudança de eixos coordenados.

8ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ se } x \text{ é racional, } x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ se } x \text{ é irracional} \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Seja $f^+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) > 0 \\ 0 & \text{se} \quad f(x) \leq 0 \end{cases}$$

e seja $f^- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que :

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) < 0 \\ 0 & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule, caso exista :

$$I_1 = \int_1^2 f^+(x)\, dx \quad ;$$

$$I_2 = \int_1^2 \left[f^+(x) - f^-(x)\right] dx$$

b) Determine $M = \max(g,h)$, onde :

$$g = \text{Sup}\,(f(x) \mid x \in \mathbb{R}) - \text{Sup}\,(f^+(x) \mid x \in \mathbb{R})$$

$$h = \text{Sup}\,(f(x) \mid x \in \mathbb{R}) - \text{Sup}\,(f^-(x) \mid x \in \mathbb{R})$$

9ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Seja Z_0^+ o conjunto dos inteiros positivos e seja

$$A = \left\{ \frac{1}{n + \frac{1}{m}} \;\middle|\; m, n \in Z_0^+ \right\}$$

Determine o conjunto A' dos pontos de acumulação de A e o conjunto A'' dos pontos de acumulação de A'.

9ª QUESTÃO
ITEM 2 (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Sejam $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Definimos $\min(f,g)$ como a função $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que :

$$h(x) = \min\big(f(x),\, g(x)\big), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se $f(x) = x^2 + 8$ e $g(x) = 6x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, calcule:

$$I = \int_1^5 h(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$$

10ª QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \frac{1}{k}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calcule, caso exista, a primeira derivada de $x^k f(k)$ no ponto $x = 0$, para k inteiro e $k \geq 0$.

SOLUÇÕES - CURSO IMPACTO

1ª QUESTÃO - ITEM 1:

a) $f(x) = \log_a x$; como $f^{-1}(1) = e$ segue-se que $f(x) = \ln x$.

b) $\int \ln x . dx =$ $\qquad u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$= x . \ln x - \int dx =$ $\qquad dv = dx \rightarrow v = x + k_1$

$= x . \ln x - x + k$

$$\int_{\varepsilon}^{1} f(x) . dx = \left[x . \ln x - x\right]_{\varepsilon}^{1} = -1 - \varepsilon . \ln\varepsilon - \varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon . \ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = 0$$

Finalmente

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} f(x) . dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-1 - \varepsilon . \ln\varepsilon - \varepsilon\right] = -1 .$$

1ª QUESTÃO - ITEM 2:

$N_1 + N_2 = 200$

$N_2 + N_3 = 400$

$N_2 = 75.$

Logo, $N_2 = 325$, $N_1 = 125$; como $N_1 + N_2 + N_3 = 525 \neq 500$, os dados são inconsistentes.

2ª QUESTÃO - ITEM 1:

Se $P(x)$ e $Q(x)$ não são primos entre si então o MDC $(P(x), Q(x))$ é um polinômio que divide $P(x)$ e divide $Q(x)$.

Como $q(x) = x(2x+1)$ segue-se que para dividir $Q(x)$ devemos ter:

(i) Kx
(ii) $K(2x+1)$
(iii) $K(2x^2+x)$.

Logo o MDC só poderá ser Kx, $K(2x+1)$, $K(2x^2+x)$ onde K é uma constante arbitrária. $(K \neq 0)$.

2ª QUESTÃO - ITEM 2:

$$\frac{m+1}{m-1} = \frac{n-2}{n+2} = \frac{m+n-p}{m-n+p} = \frac{1}{3}$$

(i) $\dfrac{m+1}{m-1} = \dfrac{1}{3} \rightarrow 2m = -4 \quad \therefore \quad m = -2.$

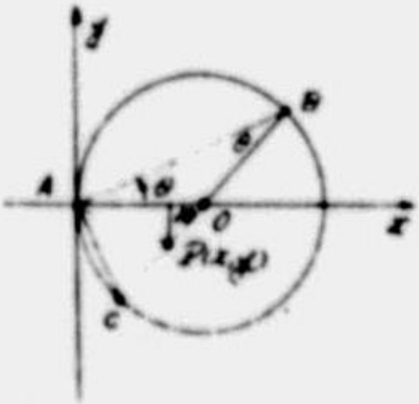
(ii) $\dfrac{n-2}{n+2} = \dfrac{1}{3} \rightarrow 2n = 8 \quad \therefore \quad n = 4.$

(iii) $\dfrac{m+n-p}{m-n+p} = \dfrac{1}{3} \rightarrow 6 - 3p = -6 + p$

$4p = 12$

$p = 3.$

3ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO:



$AB = 2r \cos\theta$

$AP = 2r \cos\theta \operatorname{sen}\theta$

$$x_p = \underbrace{2r \cos\theta \operatorname{sen}\theta}_{AP} \;.\; \underbrace{\operatorname{sen} 2\theta}_{\cos(90^\circ - 2\theta)}$$

$$y_p = \underbrace{2r \cos\theta \operatorname{sen}\theta}_{AP} \;.\; \underbrace{\cos 2\theta}_{\cos(90^\circ - 2\theta)}$$

$$x^2 + y^2 = (2r \cos\theta \operatorname{sen}\theta)^2 \Big[\underbrace{\operatorname{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta}_{1}\Big] \qquad (1)$$

Mas: $x = 2r \cos\theta \operatorname{sen}\theta \;.\; 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta =$

$= 4r \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta \Longrightarrow$

$(1) \Longrightarrow x^2 + y^2 = rx.$ $\Longleftrightarrow$ Circunferência de diâmetro AO, com possível exceção de A e O.

4ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO:

a) Se $m \in \mathbb{Z}_0$ então $mD1 \leftrightarrow m = \pm 1$. Decorre deste ponto que $aEb \leftrightarrow a = \pm b \leftrightarrow |a| = |b|$.

Provemos que E é relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

(i) E é reflexiva.

Seja $a \in \mathbb{Z}$; então $a = a$ (reflexividade da igualdade) e então $|a| = |a|$. Daí, aEa. Logo, $\forall a \in \mathbb{Z}$, aEa, ou seja, E é reflexiva.

(ii) E é simétrica.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Daí, $aEb \to |a| = |b| \to |b| = |a|$ (simetria da igualdade) $\to bEa$. Logo, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, se aEb então bEa, ou seja, E é simétrica.

(iii) E é transitiva.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Daí, aEb e $bEc \to |a| = |b|$ e $|b| = |c| \to |a| = |c|$ (transitividade da igualdade) $\to aEc$. Logo, $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$, se aEb e bEc então aEc, ou seja, E é transitiva.

De (i), (ii) e (iii), E é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

b) "z é raiz primitiva de ordem $\underline{p}$ da unidade $\leftrightarrow$ z é raiz p-ésima da unidade e z não é raiz q-ésima para nenhum $q > p$."

Logo, se $\underline{z}$ é uma raiz primitiva de ordem $\underline{t}$, por definição tal $\underline{t}$ é único. Logo, se z é uma raiz primitiva de ordem $\underline{n}$, por definição, z será raiz primitiva de ordem m, para um único $m \neq n$.

Suponhamos que $\underline{z}$ é raiz n-ésima da unidade.

Então $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ para algum $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Se z é raiz primitiva de ordem $\underline{n}$, então $m = n$. Além disso k e n serão primos entre si (pq se $\exists\, x \in \mathbb{Z}$ tq $k = k'x$ e $n = n'x$, $\frac{2k\pi i}{n} = \frac{2k'\pi i}{n'}$ e então z seria raiz de ordem $n' < n$; logo não seria primitiva de ordem n). Admitamos que x não é raiz primitiva de ordem $\underline{n}$. Então z é raiz primitiva de ordem m para algum $m < n$ e k e n não são primos entre si; logo

$$z = e^{\frac{2\bar{k}\pi i}{m}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$ para algum $\bar{k} = 0, 1, \ldots, m-1$ com $\bar{k}$ e m primos entre si.

Logo, $\frac{\bar{k}}{m} = \frac{k}{n} \to \bar{k}n = km \to m$ divide $\bar{k}n \to m$ divide n porque m e $\bar{k}$ são primos entre si; logo há m (único) tal que mDn.

5ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO:

a) O polinômio de Taylor de ordem $\underline{n}$ centrado em $x = 0$ de f é dado por:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i .$$

Calculemos pois $f^i(0)$, $i = 0, 1, \dots, 4$.

$$f^{(0)}(x) = x + \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \rightarrow f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = 1 + \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)'}{\sqrt{x^2+1} - x} = 1 + \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow f^{(1)}(0) = 0$$

$$f^{(2)}(x) = \left[- (x^2+1)^{-1/2}\right]' = x(x^2+1)^{-3/2} \rightarrow f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = (x^2+1)^{-3/2} - 3x^2(x^2+1)^{-5/2} \rightarrow f^{(3)}(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = -3x(x^2+1)^{-5/2} - 6x(x^2+1)^{-5/2} + 15x^3(x^2+1)^{-7/2} \rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

Logo $\quad T_4(x) = \frac{x^3}{3!} = \frac{x^3}{6}$.

b) Admitindo a série de potências de $f_0(x)$ convergindo a função $f_0(x)$, segue-se que:

$$f_0(x) = \frac{x^3}{6} + \dots + \dots$$

Logo $\quad \frac{f_0(x)}{x^k} = \frac{x^{3-k}}{6} + \dots + \dots$

Daí, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f_0(x)}{x^k} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^{3-k}}{6} + \dots\right)$ e este último limite existe e é nulo para $k = 0$, 1 e 2 e é igual a 1/6 para $k = 3$. Para $b > 3$ o limite não existe.

Daí $a = 0$ para $k = 0$, 1 e 2 e $a = 1/6$ para $k = 3$.

__6ª QUESTÃO__ - __ITEM ÚNICO__:

a) (i) Se $A.B = I \rightarrow |A|.|B| = 1$

(ii) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2$

logo $|A|.2 = 1 \rightarrow |A| = 1/2$

(iii) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 4 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & a-d \\ 0 & 1 & 1 & b-d \\ 0 & 2 & 4 & c-d \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & a-d \\ 1 & 1 & b-d \\ 2 & 4 & c-d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & a-d \\ 0 & 2 & a+b-2d \\ 0 & 6 & c+2a-3d \end{vmatrix} =$

$= 2c + 4a - 6d - 6a - 6b + 12d = 2c - 2a - 6b + 6d$

como $|A| = 1/2 \rightarrow |A|.|C| = c - a - 3b + 3d = f(a,b,c,d)$.

b) Seja $y = Mx^2 + Nx + P$

$y(-1) = M - N + P = a$
$y(1) = M + N + P = b$
$y(2) = 4M + 2N + P = c$
$y(0) = \qquad P = d$

$\therefore \begin{cases} M - N + P = a \\ M + N + P = b \\ 4M + 2N + P = c \\ \qquad P = d \end{cases}$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$

$\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 4 & 2 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix} = 0$ para ser possível $\rightarrow$

$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 4 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = |C| = 0 \rightarrow f(a,b,c,d) = 0.$

7ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO:

Mostraremos que o determinante dado é invariante segundo uma rotação de eixos e segundo uma translação de eixos:

a) Rotação:

Fazendo a transformação de coordenadas (rotação θ no sentido trigonométrico)

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

na equação dada, obteremos

(1) $A(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 + 2B(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) +$
$+ C(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 + \ldots + F = 0$, que é uma equação da forma

(2) $A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$, onde os coeficientes A', B' e C' são obtidos por inspeção da equação (1):

$$\begin{cases} A' = A\cos^2\theta + C\operatorname{sen}^2\theta + 2B\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \\ B' = (C-A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ C' = A\operatorname{sen}^2\theta + C\cos^2\theta - 2B\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{cases} \quad ; \quad \text{logo,}$$

$$\begin{cases} A' = \frac{A}{2}(1+\cos 2\theta) + \frac{C}{2}(1-\cos 2\theta) + B\operatorname{sen} 2\theta = \\ \quad = \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}\cos 2\theta + B\operatorname{sen} 2\theta \\ B' = \frac{C-A}{2}\operatorname{sen} 2\theta + B\cos 2\theta \\ C' = \frac{A}{2}(1-\cos 2\theta) + \frac{C}{2}(1+\cos 2\theta) - B\operatorname{sen} 2\theta = \\ \quad = \frac{A+C}{2} - \frac{A-C}{2}\cos 2\theta - B\operatorname{sen} 2\theta. \end{cases}$$

Daí, $A'C' = \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-C}{2}\right)^2\cos^2 2\theta - B^2\operatorname{sen}^2 2\theta -$

$$- (A-C)B\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta$$

e $B'^2 = \left(\frac{C-A}{2}\right)^2\operatorname{sen}^2 2\theta + B^2\cos^2 2\theta + (C-A)B\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta =$

$$= \left(\frac{C-A}{2}\right)^2(1 - \cos^2 2\theta) + B^2(1 - \operatorname{sen}^2 2\theta) +$$
$$+ (C-A)B\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta.$$

Então $A'C' - B'^2 = \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(\frac{C-A}{2}\right)^2 - B^2 =$

$$= \frac{A^2 + 2AC + B^2}{4} + \frac{C^2 - 2AC + A^2}{4} + B^2 =$$
$$= AC - B^2.$$

Logo, como o determinante $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ é igual a $AC - B^2$, mostramos que o mesmo é invariante segundo uma rotação.

(continua)

b) Translação:

Fazendo a transformação de coordenadas (translação da origem para o ponto (h,k))

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

na equação dada, vem:

$$A(x'+h)^2 + 2B(x'+h)(y'+k) + C(y'+k)^2 + \ldots + F = 0,$$

obtemos uma equação da forma

$$A(x'+h)^2 + 2B(x'+h)(y'+k) + C(y'+k)^2 + \ldots + F = 0 ,$$

que é uma equação da forma

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + \ldots + F' = 0 ,$$

onde, por inspeção, vem:

$$\begin{aligned} A' &= A \\ B' &= B \\ C' &= C ; \end{aligned}$$

e então $A'C' - B'^2 = AC - B^2$ = o determinante é invariante.

c) Uma mudança de coordenadas é a composta de uma translação por uma rotação ou de uma rotação por uma translação. Nestas condições, suponha que façamos uma transformação de coordenadas na equação

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

obtendo

$$\bar{A}\bar{x}^2 + 2\bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + 2\bar{D}\bar{x} + 2\bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0.$$

Tal transformação é equivalente a uma translação seguida de uma rotação. Se a translação transforma a equação dada em

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

tem-se por (a) e (b) que

$$AC - B^2 = A'C' - B'^2 = \bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2$$

logo

$$AC - B^2 = \bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2.$$

8ª QUESTÃO - **ITEM ÚNICO:**

(a)

(i) Como f^* é descontínua $\forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ não existe I_1.

(ii) Logo:

$$I_2 = \int_1^2 |f(x)|\,dx = \int_1^2 \frac{1}{|x|}\,dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

(b) $\operatorname{Sup}\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ não existe pois $\{\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}\}$ não é limitado em $\mathbb{R}$.

Então $\nexists g$, $\nexists h$ e consequentemente $\nexists M$.

9ª QUESTÃO - ITEM 1:

$$\boxed{a \in A' \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists b \in A \text{ tq } 0 < |b - a| < \varepsilon\ .}$$

Daí, segue-se que

$A' = \{\frac{1}{p} | p \in \mathbb{N}_0^*\} \cup \{0\}$ e

$A'' = \{0\}$.

9ª QUESTÃO - ITEM 2:

$$f(x) \leq g(x) \leftrightarrow x^2 + 8 \leq 6x \leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0 \leftrightarrow x \in [2,4]$$

Logo $h(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ f(x) & 2 \leq x \leq 4 \\ g(x) & x \geq 4. \end{cases}$

Daí, $I_1 = \int_1^5 h(x)dx = \int_1^2 g(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^5 g(x)dx$

$= \int_1^2 6x\ dx + \int_2^4 (x^2+8)dx + \int_4^5 6x\ dx$

$= \left[3x^2\right]_1^2 + \left[x^3/3 + 8x\right]_2^4 + \left[3x^2\right]_4^5$

$= (12 - 3) + (\frac{64}{3} + 32 - \frac{8}{3} - 16) + (75 - 48) =$

$= \frac{212}{3}$

$I_2 = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 + 8)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 8x\right]_2^3 =$

$= (9 + 24) - (\frac{8}{3} + 16) = \frac{43}{3}$.

Logo $I = I_1 - I_2 = \frac{212}{3} - \frac{43}{3} = \frac{169}{3}$.

__10ª QUESTÃO__ - __ITEM ÚNICO__:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \frac{1}{x} \quad , x \neq 0.$$

Logo, $f(x)$ é a soma dos termos de uma P.G. ilimitada de 1º termo = 1 e razão $x^2 \operatorname{sen}^2 1/x$.

Daí, $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2 \operatorname{sen}^2 1/x}$, $x \neq 0$.

Logo, $x^k . f(x) = x^k \cdot \dfrac{1}{1 - x^2 \operatorname{sen}^2 1/x} = Ax^k$, $\forall x \neq 0$.

Como $f(0) = 0$, segue-se que $x^k f(x) = Ax^k$, $\forall x$.

Para $k = 0$ a função não é definida.

Para $k = 1 \Rightarrow \left[x^k f(x)\right]' = 0$.

Para $k > 1 \Rightarrow \left[x^k f(x)\right]' = Akx^{k-1} \Big|_{x=0} = 0$

1ª QUESTÃO - ITEM 1 - (0,6 pontos)

a) Determine f sabendo-se que:

$f(y^x) = xf(y), \forall y \in \mathbb{R}_0^+ \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(1) = e$ onde e é a base dos logarítmos neperianos.

b) Calcule

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{1} f(x)\,dx$$

SOLUÇÃO:

a) $f(e^x) = x\, f(e)$

$= x \cdot 1$

$= x$

Logo $f \circ [e^x] = \Delta_{\mathbb{R}}$

($\Delta_{\mathbb{R}}$ - identidade sobre $\mathbb{R}$)

Daí,

$f^{-1} \circ (f \circ [e^x]) = f^{-1} \circ \Delta_{\mathbb{R}}$

$(f^{-1} \circ f) \circ [e^x] = f^{-1}$ (associatividade da composta)

$\Delta_{\mathbb{R}_0^+} \circ [e^x] = f^{-1}$

$[e^x] = f^{-1}$

Isto é, $f^{-1}(x) = e^x$

$\boxed{\text{Logo} \quad f(x) = \ln x}$

(continua)

a) <u>OUTRA SOLUÇÃO:</u>

$$f(x) = f(e^{\ell n\, x}) = \ell n\, x \,.\, f(e) = \ell n\, x$$

Isto é: $f(x) = \ell n\, x$.

b) $$\lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\epsilon}^{1} f(x)\, d\,x = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\epsilon}^{1} \ell n\, x\, d\,x$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0_+} \left[x \ell n\, x - x\right]_{\epsilon}^{1} = \lim_{\epsilon \to 0_+} \left[-1 - \epsilon\, \ell n\, \epsilon + \epsilon\right]$$

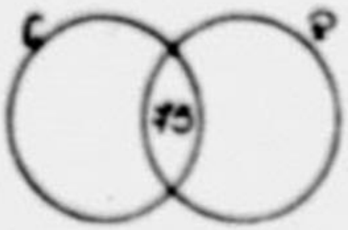
$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \epsilon\, \ell n\, \epsilon = \lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{\ell n\, \epsilon}{\frac{1}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{\frac{1}{\epsilon}}{-\frac{1}{\epsilon^2}} = \lim_{\epsilon \to 0_+} \epsilon = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \to 0_+} \left[-1 - \epsilon\, \ell n\, \epsilon + \epsilon\right] = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\epsilon}^{1} f(x)\, d\,x = -1}$$

<u>1ª QUESTÃO</u> - <u>ITEM 2</u> - (0,4 pontos)

<u>SOLUÇÃO:</u>



$$n\,(C \cup P) = n\,(C) + n\,(P) - n\,(C \cap P)$$

$$\therefore\; n\,(C \cup P) = 200 + 400 - 75$$

$$= 525 > 500$$

R.: Inconsistente.

2ª QUESTÃO - **ITEM 1** - (0,5 pontos)

SOLUÇÃO:

$q(x) = x(2x + 1)$

R.: K

Kx

$K(2x + 1)$

$K(2x^2 + x)$

2ª QUESTÃO - **ITEM 2** - (0,5 pontos)

SOLUÇÃO:

$$\frac{m + 1}{m - 1} = \frac{n - 2}{n + 2} = \frac{m + n - p}{m - n + p} = \frac{1}{3}$$

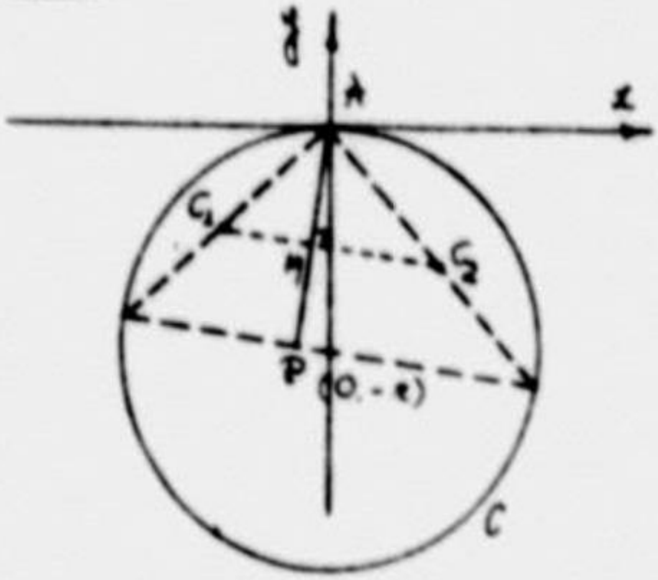
R.: $m = -2$

$n = 4$

$p = 3$

3ª QUESTÃO - **ITEM ÚNICO** - (1,0 pontos)

SOLUÇÃO:



O segmento $\overline{AP}$ é perpendicular à reta que liga os centros C_1 e C_2, sendo M [illegible]
Daí, por semelhança de triângulos, segue que o ponto P está sobre um diâm[illegible]
da circunferência C.
O L.G. dos pontos P pode ser assim descrito como a interseção das retas [illegible]
passam pelo ponto (0, -r) com as perpendiculares às mesmas traçadas pela [illegible]gem.
Assim, obtemos o sistema:

(continua)

$$\begin{cases} y = -r + mx & (1) \\ y = -\dfrac{1}{m}\, x & (2) \end{cases}$$

Daí, $-\dfrac{1}{m}\, x = -r + mx \Rightarrow x = \dfrac{mr}{m^2 + 1}$ (3)

Levando (3) em (2), vem $\Rightarrow y = -\dfrac{r}{m^2 + 1}$ (4)

Obtemos assim as seguintes equações paramétricas para o L.G. dos pontos P:

$$\begin{cases} x = \dfrac{mr}{m^2 + 1} & (3) \\ y = -\dfrac{r}{m^2 + 1} & (4) \end{cases}$$

Daí:

$$x^2 + y^2 = \frac{(m^2 + 1)\, r^2}{(m^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{1}{m^2 + 1} \qquad (5)$$

Levando (5) em (4), vem:

$$y = -r \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{r^2}\right)$$

Donde:

$$\boxed{x^2 + \left(y + \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}}$$

Logo, o L.G. é uma circunferência de centro no ponto médio do segmento que liga o ponto A ao centro de C, e de raio $\frac{r}{2}$

4ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO - (1,0 pontos)

SOLUÇÃO:

a) Devemos provar que $\underline{E}$ é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva em $\mathbb{Z}$.

i) E é reflexiva

Seja $x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = x \cdot 1$

$\Rightarrow 1$ divide 1

$\Rightarrow 1 \; D \; 1$ (def. de D)

$\Rightarrow x = x \cdot 1 \; \wedge \; 1 \; D \; 1$

$\Rightarrow (\exists\, m \in \mathbb{Z}_0)\,(x = xm \; \wedge \; m \; D \; 1)$

$\Rightarrow x \; E \; x$ (def. de E)

$\Rightarrow (\forall x)\,(x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \; E \; x)$

$\Rightarrow E$ é relação reflexiva em $\mathbb{Z}$

ii) E é simétrica

Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$

Seja $x \; E \; y$

$\Rightarrow (\exists\, m \in \mathbb{Z}_0)\,(y = mx \; \wedge \; m \; D \; 1)$

$\Rightarrow y = mx \; \wedge \; m \; D \; 1$

$\Rightarrow y = mx$

$\Rightarrow m \; D \; 1$

$\Rightarrow m = 1 \vee m = -1$

$\Rightarrow x = my$

$\Rightarrow x = my \wedge m \; D \; 1$

$\Rightarrow (\exists\, m \in \mathbb{Z}_0)\,(x = my \wedge m \; D \; 1)$

$\Rightarrow y \; E \; x$ (def. de E)

$\Rightarrow x \; E \; y \rightarrow y \; E \; x$

$\Rightarrow (\forall x)\,(\forall y)\,(x \; E \; y \qquad y \; E \; x)$

$\Rightarrow E$ é simétrica.

(continua)

iii) E é transitiva

Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Seja $x E y \wedge y E z$

$\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{Z}_0)(y = mx \wedge m D 1)$

$\Rightarrow (\exists m' \in \mathbb{Z}_0)(z = m'y \wedge m' D 1)$

$\Rightarrow mm' \in \mathbb{Z}_0$

$\Rightarrow y = mx \wedge m D 1$

$\Rightarrow z = m'y \wedge m' D 1$

$\Rightarrow z = mm'x$

$\Rightarrow m D 1$

$\Rightarrow m = 1 \vee m = -1$

$\Rightarrow m' D 1$

$\Rightarrow m' = 1 \vee m' = -1$

$\Rightarrow mm' = 1 \vee mm' = -1$

$\Rightarrow mm' D 1$

$\Rightarrow z = mm'x \wedge mm' D 1$

$\Rightarrow (\exists m'' \in \mathbb{Z}_0)(z = m''x \wedge m'' D 1)$

$\Rightarrow x E z$ (def. de E)

$\Rightarrow (x E y \wedge y E z) \leftarrow x E z$

$\Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x E y \wedge y E z) \leftarrow x E z)$

$\Rightarrow E$ é transitiva

iv) De (i), (ii) e (iii),

E é relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

(continua)

b) Seja $X = \text{cis}\, \frac{2K\pi}{n}$ uma raiz n-ésima da unidade.

Se K e n são primos entre si então X é raiz n-ésima primitiva da unidade e nesse caso existe um único $m \in \mathbb{Z}_0$ tal que $m \, D \, n$, isto é: $m = n$.

Se K e n não são primos entre si, vem:

$X = \text{cis}\, \frac{2K'd\pi}{n'd}$, onde $d = \text{m.d.c.}\,(K, n)$

$\Rightarrow X = \text{cis}\, \frac{2K'\pi}{n'}$

Nesse caso X será uma raiz n'-ésima primitiva da unidade e portanto $m = n$.

5ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO - (1,0 pontos)

SOLUÇÃO:

a) i) $f_0(x) = x + \ell n\,(\sqrt{x^2+1} - x)$

$f_0(0) = 0$

ii) $$f_0'(x) = 1 + \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

$$= 1 + \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x^2+1}}$$

$$= 1 + \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\,(\sqrt{x^2+1} - x)}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$f_0'(0) = 0$

iii) $f_0'(x) = 1 - (x^2+1)^{-1/2}$

$f_0''(x) = + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2} \cdot 2x = x(x^2+1)^{-3/2}$

$f_0''(0) = 0$

iv) $f_0'''(x) = (x^2+1)^{-3/2} + \left(-\frac{3}{2}\right)x(x^2+1)^{-5/2} \cdot 2x$

$= (x^2+1)^{-3/2} - 3x^2(x^2+1)^{-5/2}$

$f_0'''(0) = 1$

v) $$f_0^{iv}(x) = \frac{-3}{2}(x^2+1)^{-5/2} \cdot 2x - 6x(x^2+1)^{-5/2} - 3x^2\left(-\frac{5}{2}\right)(x^2+1)^{-7/2} \cdot 2x$$

$$= -3x(x^2+1)^{-5/2} - 6x(x^2+1)^{-5/2} + 15x^3(x^2+1)^{-7/2}$$

$$= -9x(x^2+1)^{-5/2} + 15x^3(x^2+1)^{-7/2}$$

$f_0^{iv}(0) = 0$

(continua)

$$f_0(x) = 0 + \frac{0x}{1!} + \frac{0x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 0x^4 + \ldots$$

$$\boxed{f_0(x) = \frac{x^3}{3!}}$$

b) i) $k = 0$

$$\lim_{x \to 0} f_k(x) = \lim_{x \to 0} x \cdot \ell n\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 0$$

ii) Para $k > 0$, ao calcularmos o limite, obtemos uma expressão do tipo $\frac{0}{0}$. Podemos, portanto, aplicar L'Hôpital.

Observemos que

$$f_k(x) = \frac{f_0(x)}{x^k}$$

Assim, $\lim_{x \to 0} f_k(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f'_0(x)}{kx^{k-1}}$

Para $k = 1$, o limite existe e é $\underline{0}$ (V. item a).

Para $k > 1$, obtemos novamente uma expressão do tipo $\frac{0}{0}$

Então:

$$\lim_{x \to 0} f_k(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f''_0(x)}{k(k-1)x^{k-2}}$$

Para $k = 2$, o limite existe e é $\underline{0}$ (V. item a).

Para $k > 2$, obtemos novamente uma expressão do tipo $\frac{0}{0}$.

Daí,

$$\lim_{x \to 0} f_k(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f'''_0(x)}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

Para $k = 3$, o limite existe e é $\frac{1}{6}$.

Para $k > 3$, o limite não existe ou é infinito.

Assim, $\lim_{x \to 0} f_k(x)$ existe e é finito para $k = 0, 1, 2$ e 3.

Os valores de $\underline{a}$ para que f seja contínua são:

$k = 0 \to a = 0$

$k = 1 \to a = 0$

$k = 2 \to a = 0$

$k = 3 \to a = \frac{1}{6}$

6ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO - (1,0 pontos)

SOLUÇÃO:

a) $|B| = 2$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 4 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & b-a \\ 3 & 3 & c-a \\ 1 & -1 & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & a-3b+2c \\ -2 & -a-b+2d \end{vmatrix} = -2a - 6b + 2c + 6d$$

$$|A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| = \frac{1}{2}$$

$$|A| \cdot |C| = \frac{1}{2}(-2a - 6b + 2c + 6d) = -a - 3b + c + 3d = f(a, b, c, d).$$

b) Seja $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, com A, B e C reais.

Teremos:
$$\begin{cases} A - B + C = a \\ A + B + C = b \\ 4A + 2B + C = c \\ C = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B = a - d \\ A + B = b - d \\ 4A + 2B = c - d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & a-d \\ 1 & 1 & b-d \\ 4 & 2 & c-d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & b-d-a+d \\ 6 & c-d-4a+4d \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -a - 3b + c + 3d = 0$$

7ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO - (1,0 pontos)

SOLUÇÃO:

O caso mais geral de mudança de eixos coordenados é um movimento simultâneo de translação e rotação de tais eixos.

Assim, se fazemos uma translação da origem para o ponto (h, k) e uma rotação de um ângulo θ no sentido trigonométrico, obteremos as seguintes relações:

$x = h + x' \cos\theta - y' \text{sen}\,\theta$ e

$y = k + x' \text{sen}\,\theta + y' \cos\theta$,

onde x' e y' são as coordenadas no novo sistema, e x e y as do antigo.

Substituindo na equação:

$$A(h + x' \cos\theta - y' \text{sen}\,\theta)^2 + 2B(h + x'\cos\theta - y' \text{sen}\,\theta)(k + x' \text{sen}\,\theta + y' \cos\theta) + C(k + x' \text{sen}\,\theta + y' \cos\theta)^2 +$$
$$+ 2D(h + x' \cos\theta - y' \text{sen}\,\theta) + 2E(k + x' \text{sen}\,\theta + y' \cos\theta) + F = 0$$

Tomaremos apenas os coeficientes de x'^2, $x'y'$ e y'^2, que nos interessam:

$$x'^2 \left[A \cos^2\theta + 2B \text{sen}\,\theta \cos\theta + C \text{sen}^2\theta\right] + x'y' \left[-2 A \text{sen}\,\theta \cos\theta + 2B \cos^2\theta - 2B \text{sen}^2\theta + 2C \text{sen}\,\theta \cos\theta\right] +$$
$$+ y'^2 \left[A \text{sen}^2\theta - 2B \text{sen}\,\theta \cos\theta + C \cos^2\theta\right]$$

Da nova relação, tiramos:

$A' = A \cos^2\theta + 2B \text{sen}\,\theta \cos\theta + C \text{sen}^2\theta$

$B' = B \cos^2\theta - B \text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta \cos\theta\,(C - A)$

$C' = A \text{sen}^2\theta - 2B \text{sen}\,\theta \cos\theta + C \cos^2\theta$

Desenvolvendo:

$$\begin{cases} A' = A \cos^2\theta + C \text{sen}^2\theta + B \text{sen}\,2\theta \\ B' = B \cos 2\theta + \dfrac{(C - A)}{2} \text{sen}\,2\theta \\ C' = A \text{sen}^2\theta + C \cos^2\theta - B \text{sen}\,2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A' = \dfrac{A + C}{2} + \dfrac{A - C}{2} \cos 2\theta + B \text{sen}\,2\theta \\ B' = B \cos 2\theta + \dfrac{(C - A)}{2} \text{sen}\,2\theta \\ C' = \dfrac{A + C}{2} - \dfrac{(A - C)}{2} \cos 2\theta - B \text{sen}\,2\theta \end{cases}$$

O novo determinante será:

$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = A'C' - B'^2 = \frac{(A + C)^2}{4} - \frac{(A - C)^2}{4} \cos^2 2\theta - B^2 \text{sen}^2 2\theta.$$

$$- B(A - C) \cancel{\text{sen}\,2\theta} \cos 2\theta - B^2 \cos^2 2\theta - \frac{(A - C)^2}{4} \text{sen}^2 2\theta + B(A - C) \cancel{\text{sen}\,2\theta} \cos 2\theta =$$

$$= \frac{(A + C)^2}{4} - \frac{(A - C)^2}{4} \cdot (\text{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta) - B^2 (\text{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta) = \frac{A^2 + C^2 + 2AC}{4} - \frac{A^2 + C^2 - 2AC}{4} - B^2 =$$

$$= AC - B^2$$

Logo, concluimos que o determinante é realmente invariante por mudança de eixos.

8ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO - (1,0 pontos)

SOLUÇÃO:

$$f^{+}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in Q_{+}^{*} \\ -\dfrac{1}{x}, & x \in I_{-}^{*} \\ 0, & x \in I_{+} \cup Q_{-} \end{cases}$$

$$f^{-}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & x \in I_{+}^{*} \\ \dfrac{1}{x}, & x \in Q_{-}^{*} \\ 0, & x \in I_{-} \cup Q_{+} \end{cases}$$

a) I_1 não existe porque f^{+} é descontínua num número infinito de pontos no intervalo de integração

$$f^{+}(x) - f^{-}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ell n\, x \Big]_1^2 = \ell n\, 2$$

b) Os conjuntos:

$A = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$ e

$B = \{ f^{+}(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$ não são limitados superiormente.

Daí: não existem sup A e sup B (mesmo em $\overline{\mathbb{R}}$)

Logo: g não existe!

Por outro lado:

$\sup \{ f^{-}(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = 0$

Logo: $h = \sup \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \sup A$, que, como visto acima, não existe.

Daí: tanto g como h não existem e, portanto não se pode definir o número M.

I_1 = ... não existe
$I_2 = \ell n\, 2$
M : não é definido

<u>9ª QUESTÃO</u> - <u>ITEM 1</u> - (0,5 pontos)

<u>SOLUÇÃO:</u>

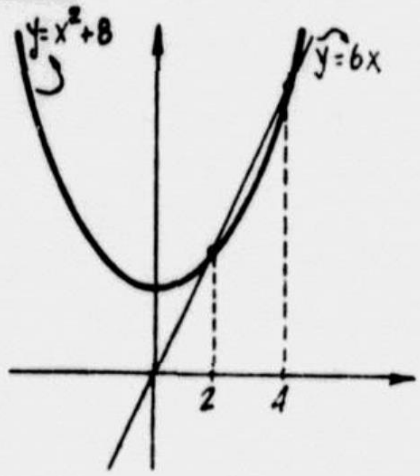
$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n)(n \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge x = \frac{1}{n})\} \cup \{0\}$

$= \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

$A'' = \{0\}$

<u>9ª QUESTÃO</u> - <u>ITEM 2</u> - (0,5 pontos)

<u>SOLUÇÃO</u>:



$x^2 + 8 = 6x$

$x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad x = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$

$$h(x) = \begin{cases} 6x, & x \leq 2 \\ x^2 + 8, & 2 < x < 4 \\ 6x, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$\int_1^5 h(x)\,dx = \int_1^2 6x\,dx + \int_2^4 (x^2+8)\,dx + \int_4^5 6x\,dx = 6^3 \cdot \frac{x^2}{8}\Big]_1^2 + \frac{x^3}{3} + 8x\Big]_2^4 + 3x^2\Big]_4^5 =$$

$$= 12 - 3 + \frac{64}{3} + 32 - \frac{8}{3} - 16 + 75 - 48 = \frac{56}{3} + 52$$

$$\int_2^3 (x^2+8)\,dx = \frac{x^3}{3} + 8x\Big]_2^3 = 9 + 24 - \frac{8}{3} - 16 = 17 - \frac{8}{3}$$

$$I = 52 + \frac{56}{3} - 17 + \frac{8}{3} = 35 + \frac{64}{3} = \frac{169}{3}$$

10ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO - (1,0 pontos)

SOLUÇÃO:

Seja $g(x) = f(k) \cdot x^k$

Então:

(i) $f(k)$ existe se e somente se a série $\sum_{0}^{\infty} k^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \frac{1}{k}$ converge.

Isto ocorre para:

$\left| k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{k} \right| < 1$, isto é:

$\left| \operatorname{sen}^2 \frac{1}{k} \right| < \frac{1}{k^2}$, ou seja $\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} \right)^2 < 1$, o que é válido,

qualquer que seja $k \in \mathbb{N}^*$ (o valor máximo de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é 1).

(ii) para $k = 1$, ocorre:

$$f'(0) = \sum_{0}^{\infty} \operatorname{sen}^{2n} 1 = f(1) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 1} \qquad \text{(série geométrica)}$$

(iii) para $k \neq 1$, vem:

$g'(x) = kx^{k-1} f(k)$ e, portanto:

$g'(0) = 0$

(iv) para $k = 0$, ocorre: $x^k f(k) = f(0) = 0$

R.:

$$\frac{d}{dx} \left(x^k f(k) \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 1}, & k = 1 \\ 0, & k \in \mathbb{N} - \{1\} \end{cases}$$