IME – ÁLGEBRA – 1972/1973
JS – 5/12/1972 (Enunciados) e 6/12/1972 (Soluções)

1.ª QUESTÃO

Dada a curva de equação obtenha as equações dos seus eixos de simetria.

$$5x^2 - y^2 + 6xy + 4x + 8y + 10 = 0$$

Obs: $\tan^{-1}\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

2.ª QUESTÃO

Dado o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 - 17x_3 + 17x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 0 \\ x_1 - mx_2 = 0 \\ x_2 - mx_3 = 0 \\ x_3 - mx_4 = 0 \\ x_4 - mx_5 = 0 \\ x_5 - mx_6 = 0 \end{cases}$$

determine os valores de m para os quais

$x_i \neq 0$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3.ª QUESTÃO

Considere os algarismos, 1, 2, 3, 4, 5. Uma das permutações possíveis destes algarismos origina o número 42351.

Determine a soma dos números formados, quando os algarismos acima são permutados de todos os modos possíveis.

4.ª QUESTÃO

P (x) é um polinômio do quarto grau e sua segunda derivada é P'' (x). Determine P (x), sabendo que P'' (x) = (x ao quadrado) + X + 1 e que P (x) é divisível por P'' (x).

5.ª QUESTÃO

Considere a cônica

(x ao quadrado) — (y ao quadrado) = 1

Suponha que T é a tangente à cônica dada. Suponha ainda que N é uma reta que contém o ponto de coordenadas (0,0) e é normal a T. Determine o LUGAR GEOMÉTRICO dos pontos do plano xy que pertencem, simultaneamente, a N e a T.

6.ª QUESTÃO

Calcule a soma dos quadrados dos coeficientes de (x + a) elevado a (M).

7.ª QUESTÃO

Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{7x}\right)^x$$

8.ª QUESTÃO

Calcule o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+M & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+N & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+P & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+R \end{vmatrix}$$

Sendo

$M = \log_a a^a$

$N = e^{\ln a}$

$P = \log_{10} 10^{\left(\frac{1}{a}\right)^2}$

$R = (2a)^{2 \log_a a}$

$\log_a y$ ..... logaritimo de y na base a

$\ln x$ .... logaritimo de x na base e

e .... base dos logaritimos neperianos

9.ª QUESTÃO

Considere uma curva de equação

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Suponha que esta curva tenha um ponto de inflexão em (0,4) e que é tangente ao eixo dos xx em (2,0). Determine os valores de a, b, c, d, esboçando o gráfico da curva.

10.ª QUESTÃO

Calcule

$$S = \sum_{n=0}^{n=30} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

Soluções – CURSO VETOR

1ª QUESTÃO - SOLUÇÃO:

A equação do diâmetro conjugado da direção de coeficiente angular m na cônica de equação $F(x,y) = 0$ é $\frac{\partial F}{\partial x} + m\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

$$(10x + 6y + 4) + m(-2y + 6x + 8) = 0.$$

$$(5 + 3m)x + (3-m)y + (2 + 4m) = 0.$$

cujo coeficiente angular é $-\frac{5+3m}{m-3}$;

Para que o diâmetro seja eixo, ele deve ser perpendicular a sua direção conjugada então,

$$\frac{5+3m}{m-3} = -\frac{1}{m}$$

$$3m^2 + 6m - 3 = 0$$

$$m = -1 \pm \sqrt{2}.$$

os eixos são, portanto,

$$\boxed{\begin{array}{c}(2 + 3\sqrt{2})x + (4 - \sqrt{2})y + (4\sqrt{2} - 2) = 0 \\ \text{e} \\ (2 - 3\sqrt{2})x + (4 + \sqrt{2})y - (4\sqrt{2} + 2) = 0\end{array}}$$

2ª QUESTÃO - SOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & -17 & 17 & 4 & -4 \\ 1 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \end{vmatrix} = 0$$

$$4m^5 - 4m^4 - 17m^3 + 17m^2 + 4m - 4 = 0$$

(equação recíproca)

	4	-4	-17	17	4	-4
1	4	0	-17	0	4	0

$$\boxed{m_1 = 1}$$

As outras soluções são as raízes de

$$4m^4 - 17m^2 + 4 = 0.$$

$m_2 = 2 \quad m_3 = -2 \quad m_4 = \frac{1}{2} \quad m_5 = -\frac{1}{2}$

RESPOSTA: $m_1 = 1$

$m_2 = 2$

$m_3 = -2$

$m_4 = \frac{1}{2}$

$m_5 = -\frac{1}{2}$

3ª questão - solução:

São $P_5 = 120$ permutações.

Se juntarmos cada permutação com a sua complementar, a soma em cada par será 66.666.

Como são 60 pares, a resposta é

$$66.666 \times 60 = \boxed{3.999.960}$$

4ª questão - solução:

$P''(x) = x^2 + x + 1$

$P'(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + A$

$P(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + Ax + B$

$P(x) = (x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 12Ax + 12B) \cdot \frac{1}{12}$

1	2	6	12A	12B	1	1	1
-1	-1	-1			1	1	4
	1	5	12A	12B			
	-1	-1	-1				
		4	12A-1	12B			
		-4	-4	-4			
			12A-5	12B-4			

$A = \frac{5}{12}$ $\quad B = \frac{4}{12}$;

$$\boxed{P(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}}$$

5ª QUESTÃO - SOLUÇÃO:

A tangente à cônica dada no ponto (a,b) é:

$$by - ax + 1 = 0 \quad (a^2 - b^2 = 1).$$

A equação de N é $ay + bx = 0$.

A equaçao do lugar é dada por

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases}$$

Eliminando os parâmetros, obtemos

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

que é uma lemniscata de Bernouilli (podária da hipérbole em relação ao seu centro).

6ª QUESTÃO - SOLUÇÃO:

$$(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i x^{n-1}$$

$$S = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$$

$$(x+1)^n = C_1^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n x^0$$

$$(1+x)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

Multiplicando membro a membro, vem:

$$(x+1)^{2n} = \left[(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2\right] x^n +$$

$+ T$, sendo T a soma de todos os termos que não contem x^n.

Como o termo em x^n no desenvolvimento de

$(x+1)^{2n}$ é: $C_{2n}^n x^n$, concluímos que

$$\sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2 = C_{2n}^n \quad \text{ou} \quad \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

7ª QUESTÃO - SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{7x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{7x}\right)^{7x}\right]^{1/7} =$$

$$= \boxed{e^{1/7}}$$

8ª QUESTÃO - SOLUÇÃO:

Subtraindo de cada coluna a primeira, resulta

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & M & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & N & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & P & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & R \end{vmatrix} = MNPR$$

Como $M = a$, $N = a$, $P = (\frac{1}{a})^2$, $R = (2a)^2$

$$\Delta = a \cdot a \cdot \frac{1}{a^2} \cdot 4a^2$$

$$\boxed{\Delta = 4a^2} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

9ª QUESTÃO – **SOLUÇÃO:**

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

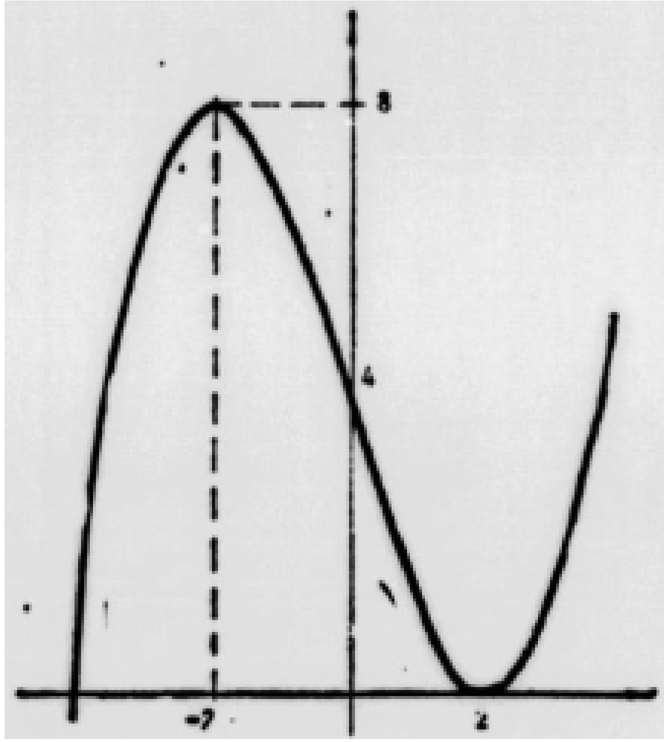
$$x = 0 \Rightarrow y = 4 \qquad \boxed{d = 4}$$

$$y''(0) = 0 \qquad \boxed{b = 0}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 0 \qquad \boxed{8a+4b+2c+d = 0}$$

$$y'(2) = 0 \qquad \boxed{12a + 4b + c = 0}$$

$$a = +\frac{1}{4} \quad b = 0 \quad c = -3 \quad d = 4.$$



10ª QUESTÃO – **SOLUÇÃO:**

$$\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{30} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{32} = \boxed{\frac{31}{32}}$$