IME – ÁLGEBRA – 1970/1971
(O Globo, 5/12/70, pág. 15)

ENUNCIADO: Assinale abaixo o valor da expressão

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x} = e^{\lambda} \quad \text{onde}$$

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} 5x\left(\frac{2}{x}\right) = 10$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x} = e^{10}$$

Resp: A

ENUNCIADO: Indique abaixo o valor da expressão

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1-x)}{\operatorname{sen} x}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1-x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

Resp: C

ENUNCIADO: Assinale abaixo o valor da expressão

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resp: C

ENUNCIADO: Assinale abaixo o valor que deve ser atribuído à função $y = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \pi x$ no ponto de abcissa $x=0$ para tornar a mesma contínua no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

$$y = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \pi x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \pi x = \lim_{x\to 0} \frac{\pi x}{x} = \pi$$

logo $f(0) = \pi$

Resp: [illegible]

ENUNCIADO: No plano xy uma curva é definida pelas equações

$$x = 10 + 6 \cos 2t$$
$$y = -6 \operatorname{sen} 2t$$

Marcar abaixo o coeficiente angular de uma reta que tangencia a curva dada num ponto de abcissa $x = 13$, e de ordenada $y > 0$.

$x = 10 + 6\cos 2t \Rightarrow dx = -12 \operatorname{sen} 2t\, dt$

$y = -6 \operatorname{sen} 2t \qquad dy = -12 \cos 2t\, dt$

logo $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} 2t$

fazendo $x = 13$ vem $13 = 10 + 6 \cos 2t \quad \cos 2t = 1/2$

fazendo $y > 0$, vem $\operatorname{sen} 2t < 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} 2t < 0$

logo $\operatorname{ctg} 2t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

então $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Resp: D

ENUNCIADO: Um corpo se move no plano xy descrevendo a trajetória $y = \lambda x^2 - C$. Sua projeção no eixo dos x se move com a velocidade de B u.v. (unidades de velocidade). A velocidade da projeção vertical será, portanto,

$y = \lambda x^2 - C$

$\frac{dy}{dt} = 2\lambda x \frac{dx}{dt}$, como $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v_x = \frac{dx}{dt}$ vem

$v_y = 2\lambda x\, v_x$

Sabemos que $v_x = B$ logo $v_y = 2\lambda Bx$.

Resp: [illegible]

ENUNCIADO: Dada a função $z = \frac{u^v}{v^u}$ onde $u = \frac{1}{3}x^3$ e $v = x^2$, assinalar entre os valores abaixo, o correspondente a $\frac{dz}{dx}$ no ponto em que $x = 1$.

$$z = \frac{(1/3\, x^3)^{x^2}}{(x^2)^{\frac{x^3}{3}}}$$

$$\ln z = x^2 \ln \frac{x^3}{3} - \frac{2x^3}{3} \ln x$$

$$\frac{z'}{z} = 2x \ln \frac{x^3}{3} + x^2 \cdot \frac{x^2}{x^3/3} - 2x^2 \ln x - \frac{2x^3}{3x}$$

$x = 1 \to z = 1/3$

Logo, para $x = 1$ temos

$$z' = \frac{1}{3}\left[2 \cdot 1 \cdot \ln \frac{1}{3} + 3 - 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 - \frac{2}{3}\right]$$

$$z' = \frac{-2}{3} \ln 3 + \frac{7}{9}$$

Resp: [illegible]

ENUNCIADO: Resolver a equação

$$2^{y+1} - \frac{7}{2^{y-1}} + 2^{y-2} = \frac{1}{2^{y-2}}$$

e assinalar abaixo o seu resultado.

$$2^{y+1} - \frac{7}{2^{y-1}} + 2^{y-2} = \frac{1}{2^{y-2}}$$

fazendo $2^y = x$, vem:

$$2x - \frac{14}{x} + \frac{x}{4} = \frac{4}{x}$$

$$8x^2 - 56 + x^2 = 16$$

$$9x^2 = 72 \quad x^2 = 8 = 2^3$$

mas $x^2 = 2^{2y}$ então

$$2^{2y} = 2^3 \quad 2y = 3 \quad y = 1,5$$

Resp: E

ENUNCIADO: Resolver a equação

$$y^4 - 16 = 0$$

e assinalar abaixo o conjunto de suas raízes.

$$y^4 - 16 = 0$$

$$y^4 = 16 \therefore y^2 = \pm 4 \quad y = 2$$

$$y = -2$$

$$y = 2i$$

$$y = -2i$$

Resp: E

ENUNCIADO: Resolver a equação e assinalar abaixo o resultado

$$3^{\log_{10} x^2} - 4 \cdot 3^{\log_{10} x} + 3 = 0$$

$$3^{\log_{10} x^2} - 4 \cdot 3^{\log_{10} x} + 3 = 0$$

para x 0 temos

$$3^{2\log_{10} x} - 4 \cdot 3^{\log_{10} x} + 3 = 0$$

fazendo $3^{\log_{10} x} = y$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y-1)(y-3) = 0 \quad y=1 \text{ ou } y=3$$

para $y=1$

$$3^{\log x} = 1 \quad x = 1$$

para $y = 3$

$$3^{\log x} = 3 \quad x = 10$$

Resp: E

ENUNCIADO: Achar o limite da soma dos têrmos da série abaixo. (O valor absoluto de a é maior que 1).

$$\frac{a}{a} + \frac{2a}{a^2} + \frac{3a}{a^3} + \frac{4a}{a^4} + \dots$$

$$S = \frac{a}{a} + \frac{2a}{a^2} + \frac{3a}{a^3} + \frac{4a}{a^4} + \dots$$

$$Sa = a + \frac{2a}{a} + \frac{3a}{a^2} + \frac{4a}{a^3} + \dots$$

$$\text{logo } Sa - S = a + \frac{2a}{a} - \frac{a}{a} + \frac{3a}{a^2} - \frac{2a}{a^2} + \frac{4a}{a^3} - \frac{3a}{a^3} + \dots$$

$$Sa - S = a + \frac{a}{a} + \frac{a}{a^2} + \frac{a}{a^3} + \dots$$

$$S(a-1) = \frac{a}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a^2}{a-1} \qquad S = \left[\frac{a}{a-1}\right]^2$$

Resp: E

ENUNCIADO: Resolva o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1 - x + 2y} - \dfrac{1}{x + 2y - 1} = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\dfrac{1}{1 - x + 2y} + \dfrac{1}{1 - x - 2y}} = 2 \end{cases}$$

seja $z = 1 - x + 2y$ e $w = x + 2y - 1$

então

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{w} = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{z} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} z = 4 \\ w = 4 \end{array}$$

logo

$$\begin{array}{l} 1 - x + 2y = 4 \\ -1 + x + 2y = 4 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

Resp: A

ENUNCIADO: Verifique a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{n}\right)$$

para cada $n \in \mathbb{N} \therefore \operatorname{sen} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$

logo $\operatorname{sen}^3 \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^3}$

como a série $\sum \frac{1}{n^3}$ é convergente

então a série $\sum \operatorname{sen}^3\left[\frac{1}{n}\right]$ é convergente

Resp: C

ENUNCIADO: Verificar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n}$$

O desenvolvimento em série de $\log(1+x)$ fornece

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

pelo critério de Raabe:

$$n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = n\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right] =$$

$$= n\left[e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1} - 1\right] \approx$$

$$\approx n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right] \approx$$

$$\approx n\left[n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right) - 1\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}$$

logo

$$\lim n\left[\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right] = \lim\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right] = -\frac{1}{2}$$

Logo a série diverge. Resp: B

ENUNCIADO: Resolva o sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} x^{1/4} + y^{1/5} = 3 \\ x^{1/2} + y^{2/5} = 5 \end{cases}$$

Chamando-se $x^{1/4} = a$ e $y^{1/5} = b$ temos:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \therefore \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = 9 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow ab = 2$$

$$\text{logo} \begin{cases} a = 1 \text{ e } b = 2 \\ \text{ou} \\ a = 2 \text{ e } b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Então} \begin{cases} x = 1,\ y = 32 \\ \text{ou} \\ x = 16,\ y = 1 \end{cases}$$

Resp: D

ENUNCIADO: Resolver a equação

$$6x^6 + 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 - 35x - 6 = 0$$

	6	35	56	0	-56	-35	-6
1	6	41	97	97	41	6	0
-1	6	35	62	35	6	0	

Raiz: $x_1 = 1$

Raiz: $x_2 = -1$

$$6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

$$y = x + \frac{1}{x} \therefore y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$6(y^2 - 2) + 35y + 62 = 0 \therefore \begin{cases} y = -5/2 \\ y = -10/3 \end{cases}$$

$$x + \frac{1}{x} = -5/2 \therefore 2x^2 + 5x + 2 = 0 \quad \begin{cases} x_3 = -1/2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

$$x + \frac{1}{x} = -10/3 \therefore 3x^2 + 10x + 3 = 0 \quad \begin{cases} x_5 = -3 \\ x_6 = -1/3 \end{cases}$$

Raízes $\{-1;\ +1;\ -2;\ -2;\ -1/2;\ -3;\ -1/3\}$

Resp: B

ENUNCIADO: Num sistema de numeração duodecimal quantos números de 3 algarismos diferentes existem, cuja soma dos 3 algarismos seja ímpar? (Considerar 012, 014, 016 etc. números de 3 algarismos diferentes).

6 pares e 6 ímpares.

Possibilidade de soma ímpar: 3 ímpares
2 pares e 1 ímpar

i) 3 ímpares: A_6^3

ii) 2 pares e 1 ímpar: $18A_6^2$

nº total: $A_6^3 + 18A_6^2 = 6.5.4 + 18.6.5 = 120 + 540 = 660$

Resp: C

ENUNCIADO: 5 rapazes e 5 moças devem posar para uma fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar êste grupo?

Modo de fixar os rapazes: P5

Modo de fixar as mulheres: P5

Logo: P5.P5 é o número de pares em cada degrau

como a ordem influi, temos:

$N = (P_2)^5.P_5.P_5 \qquad N = 460800$

Resp: D

ENUNCIADO: Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de salada contendo 6 espécies diferentes podem ser feitas?

$C_{10}^6 = 210$ Resp: E

ENUNCIADO: Calcular o têrmo de maior coeficiente no desenvolvimento de $(\sqrt{x} + y^2)^{10}$

$$T_{k+1} = C_{10}^k (y^2)^k (\sqrt{x})^{10-k}$$

têrmo de maior coeficiente: T_6

$$T_6 = C_{10}^5\, y^{10}\, x^{5/2} = 252\, x^{5/2}\, y^{10}$$

Resp: C

ENUNCIADO: Calcule o 1º têrmo de coeficiente negativo no desenvolvimento em série da expressão

$$\left[\sqrt{\frac{y}{x}} + (xy)\right]^{9/2}$$

O têrmo será negativo quando $\binom{9/2}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, fôr negativo, logo $k = 6$

Assim

$$T_7 = \binom{9/2}{6}(xy)^6\left[\sqrt{\frac{y}{x}}\right]^{\frac{9}{2}-6} = \frac{-21}{1024}x^{27/4}y^{21/4}$$

Resp: E

ENUNCIADO: Determinar os números reais m, n e r de tal modo que a expressão

$$\frac{(2-m)x^3 + (n-1)x^2 + (n+1)x + (r-3)}{x^2 + 6x + 1}$$

seja independente de x.

$$(2-m)x^3 + (n-1)x^2 + (n+1)x + (r-3) = kx^2 + 6kx + k$$

$m = 2$

$n - 1 = k \rightarrow k = 1$

$n + 1 = 6k \rightarrow n = 5$

$r - 3 = k \rightarrow r = 4$

Resp: C

ENUNCIADO: λ é um número real. Entre que limites deverá estar situado λ para que $(1+i)$ seja raiz do polinômio

$$P(x) = x^3 + mx^2 + \lambda nx + \lambda \ ?$$

Obs.- m e n são números inteiros não negativos.

$P(x) = x^3 + mx^2 + \lambda nx + \lambda$

como $(1+i)^3 = -2 + 2i$

$(1+i)^2 = 2i$

$P(1+i) = 0$ logo

$0 = -2 + 2i + 2mi + \lambda n(1+i) + \lambda$

$0 = -2 + \lambda n + \lambda + (2 + 2m + \lambda n)i$

logo $\lambda n + \lambda - 2 = 0 \therefore n = \frac{2-\lambda}{\lambda}$ (1)

$2 + 2m + \lambda n = 0$

$2 + 2m + 2 - \lambda = 0 \therefore m = \frac{\lambda - 4}{2}$ (2)

Como m e n são naturais de (2) $\lambda \geq 4$ e de (1) λ não pode ser maior ou igual a 2, logo é impossível tal equação possuir raiz $1 + i$

Resp: E

ENUNCIADO: Resolva o sistema

$$\begin{cases} (1-i)\bar{z}_1 + i\,z_2 = i \\ 2z_1 + (1+i)\,\bar{z}_2 = 0 \end{cases}$$

onde z_1 e z_2 são números complexos de partes reais e imaginárias.

Obs. $\bar{z}$ é o conjugado de z.

$z_1 = a + bi$

$z_2 = c + di$

$$\begin{cases} (1+i)(a-bi) + i(c+di) = i \\ 2(a+bi) + (1+i)(c-di) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - b - d) - bi = i \\ 2a + c + (2b - d + c)i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b - d = 0 \\ b = -1 \\ 2a + c = 0 \\ 2b - d + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 0 \\ c - d - 2 = 0 \\ -a + c - 1 = 0 \end{cases}$$, sistema impossível

Resp: B

ENUNCIADO: Sejam $f(x) = e^{(a-1)x}$ e $g(a) = \int_0^1 a\,f(x)dx$ funções reais de variável real.

Calcular a para que $g(a)$ seja o inverso de $(a-1)$.

Para cada a, temos:

$$\int_0^1 af(x)dx = a\int_0^1 f(x)dx = a\int_0^1 e^{(a-1)x}dx = \frac{a}{(a-1)}\left[e^{(a-1)x}\right]_0^1$$

$$= \frac{a}{a-1}\left[e^{a-1} - 1\right]$$

Mas, pelo enunciado

$$\frac{a}{a-1}\left[e^{a-1} - 1\right] = \frac{1}{a-1} \qquad e^{a-1} = 1 + \frac{1}{a}$$

$$a = 1 + \log_e\left[1 + \frac{1}{a}\right]$$

Resp: D