IME – ÁLGEBRA – 1969/1970 – Augusto Cesar Morgado
(JS, 6/12/1969, pág. 11 e depois pág. 10)

1ª Questão: item 1 - valor 0,4

ENUNCIADO:

$$C = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x).$$

Calcule C.

SOLUÇÃO:

$$C = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

RESPOSTA: 0

1ª item 2 - valor 0,4

ENUNCIADO:

$$D = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+2}$$

Calcule D

SOLUÇÃO:

$$D = e^{\lim_{x \to \infty} (x+2)\, 1 \frac{x+2}{x-1}}$$

$$= e^{\lim_{x \to \infty} (x+2)\left(\frac{x+2}{x-1} - 1\right)}$$

$$= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{3(x+2)}{x-1}} = e^3$$

RESPOSTA: e^3

Obs.: 1ª linha da solução: $D = e^{\lim_{x\to\infty}(x+2)\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}$

1ª item 3 - valor 0,4

ENUNCIADO:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$ Calcule E.

SOLUÇÃO:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \qquad S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \qquad E = \lim_{n \to \infty} S_n = 1$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

RESPOSTA: 1

1º item 4 — valor 0,4

ENUNCIADO: —

Determinar os pontos de inflexão, da Gaussiana $y = e^{-x^2}$.

OBS: e ... base dos logaritmos, neperianos.

SOLUÇÃO:

$$y' = -2x e^{-x^2}$$

$$y'' = -2 e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$y'' = 0 \qquad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \; . \; y = e^{-\frac{1}{2}}$$

RESPOSTA:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

1º item 5 — valor 0,4

ENUNCIADO: Uma bola é lançada na vertical, de encontro ao solo, de uma altura h. Cada vez que bate no solo, ela sobe até a metade da altura de que caiu. Calcular o comprimento total percorrido pela bola em suas trajetórias, até atingir o repouso.

SOLUÇÃO:

$$h + \frac{h}{2} + \frac{h}{2} + \frac{h}{4} + \frac{h}{4} + \frac{h}{8} + \frac{h}{8} + \cdots =$$

$$h + 2\left[\frac{h}{2} + \frac{h}{4} + \frac{h}{8} + \cdots\right] =$$

$$h + 2\,\frac{\frac{h}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = h + 2h = 3h$$

RESPOSTA. 3h.

1ª item 6 — valor 0,4

ENUNCIADO

Sendo $A^{8}_{n+1} = A^{7}_{n} + y A^{6}_{n}$ e $n > 7$, determinar y em função de n. OBS n é inteiro positivo.

SOLUÇÃO:

$(n+1)n(n-1)\ldots(n-5)(n-6) =$

$= n(n-1)\ldots(n-5)(n-6) + yn(n-1)\ldots(n-5)$

DIVIDINDO POR $n(n-1)\ldots(n-5)$ VEM

$(n+1)(n-6) = (n-6) + y$

$y = n(n-6)$

Resposta

$y = n(n-6)$

1ª item 7 — valor 0,4

ENUNCIADO: Dada a curva $4x^2+y^2-4=0$, determine as equações das retas tangentes a esta curva que contém o ponto $(-3,-2)$

SOLUÇÃO:

$y+2 = m(x+3)$

$y = -2 + mx + 3m$

$4x^2 + 4 + m^2x^2 + 9m^2 - 4mx - 12m + 6m^2x - 4 = 0$

$(m^2+4)x^2 + 2m(3m-2)x + 3m(3m-4) = 0$

$\Delta = 0 \quad m^2 - 3m = 0$

$m_1 = 0$ | R_1 $y = -2$

$m_2 = \frac{3}{2}$ | R_2: $3x - 2y + 5 = 0$

RESPOSTA:

$m_1 = 0$ | R_1: $y = -2$

$m_2 = \frac{3}{2}$ | R_2: $3x - 2y + 5 = 0$

Obs.: 5ª linha da solução: $2m^2 - 3m = 0$

1º QUESTÃO - item 8 - valor: 0,4

ENUNCIADO: estabeleça as equações das retas que distam 10 (dez) unidades da origem e que contém o ponto (5,10)

SOLUÇÃO:

$R: y - 10 = m(x-5)$

$y - mx + 5(m-2) = 0$

$$\left|\frac{0 - 0 + 5(m-2)}{\sqrt{1+m^2}}\right| = 10$$

$|m-2| = 2\sqrt{1+m^2}$

$m^2 - 4m + 4 = 4 + 4m^2$

$\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{l} R_1: y = 10 \\ R_2: 4x + 3y - 50 = 0 \end{array}}$

1ª QUESTÃO - item 9 - valor: 0,4

ENUNCIADO: Dado o sistema de equações

$$x + ay + a^2z = k^2$$
$$\frac{x}{a} + y + bz = k^2$$
$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b} + z = k^2$$

onde $a, b, k \neq 0$, pedem-se os valores de $\underline{a}$ e $\underline{b}$, que tornem o sistema indeterminado.

SOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-a \\ \frac{1}{b}-\frac{1}{a} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab} \therefore a = b$$

nesse caso o sistema fica

$$\begin{cases} x - ay + a^2z = k^2 \\ x + ay + a^2z = k^2a \\ x + ay + a^2z = k^2a^2 \end{cases}$$

para ser indeterminado:

$$k^2 = k^2a = k^2a^2 \therefore a = 1$$

RESPOSTA: $a = b = 1$

Obs.: A primeira equação é $x + ay + a^2z = k^2$

1ª QUESTÃO - item 10 - valor: 0,4

ENUNCIADO: Calcule o valor do determinante de ordem n abaixo, em função de $\underline{a}$ e $\underline{n}$.

SOLUÇÃO:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ 1 & a & 1 \ldots\ldots 1 \\ 1 & 1 & a \ldots\ldots 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots a \end{vmatrix}$$

Somando tôdas as colunas à primeira vem:

$$\begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ a+m-1 & a & 1 \ldots\ldots 1 \\ a+n-1 & 1 & a \ldots\ldots 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a+n-1 & 1 & 1 \ldots\ldots a \end{vmatrix}$$

subtraindo de todas as linhas a primeira:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 0 & a-1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & a-1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots a-1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = (a+n-1)(a-1)^{n-1} = (a-1)^n + n(a-1)^{n-1}$$

2º QUESTÃO - item 11 valor: 0,4

ENUNCIADO: Dada a equação

$x - \cos(xy) = 0$, calcule $\frac{dy}{dx}$

SOLUÇÃO:

$$1 + \operatorname{sen} xy\left[x\frac{dy}{dx} + y\right] = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + y \operatorname{sen} xy}{x \operatorname{sen} xy}$$

2º QUESTÃO - item 12 - valor: 0,4

ENUNCIADO: Determine quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5.

OBS: considere os números iniciados com o algarismo 0 (por exemplo 0123), números de 3 algarismos

SOLUÇÃO: O primeiro lugar pode ser preenchido de 5 modos (não se pode usar o zero)

o segundo lugar, de 5 modos (não se pode repetir algarismos)

o terceiro, de 4 modos

o quarto, de 3 modos

RESPOSTA: $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

2º QUESTÃO - item 13 - Valor: 0,4

ENUNCIADO: determine as assíntotas da curva

$$y = x + 2 - \frac{3}{x}$$

SOLUÇAO: EVIDENTEMENTE, $x = 0$ E $y = x + 2$.

2º QUESTÃO: item 14 - valor 0,4

ENUNCIADO: $F = \sqrt{-15 - 8i}$

Calcule F, escrevendo a resposta sob a forma $a + bi$, com $\underline{a}$ e $\underline{b}$ inteiros.

OBS: $i = \sqrt{-1}$

SOLUÇÃO:

$$F = \sqrt{-15 - \sqrt{-64}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-15 + \sqrt{225 + 64}}{2}} - \sqrt{\frac{-15 - \sqrt{225 + 64}}{2}} =$$

$$= 1 - 4i$$

RESPOSTA: $\pm(1 - 4i)$

2ª QUESTÃO - item 15 - Valor 0,4

ENUNCIADO: Determine os pontos do plano complexo que satisfazem simultâneamente as equações:

$$|z-2| = |z+4|$$
$$|z-3| + |z+3| = 10$$

OBS: $|z|$ ... módulo de z

SOLUÇÃO:

$X(z,2) = X(z,-4)$. z pertence a mediatriz do segmento cujos extremos são as imagens de 2 e -4 $z \in x = 1$

$X(z,3) + X(z,-3) = 10$

z pertence à elipse de focos nas imagens de 3 e -3 e eixo maior 10. $a=5$ $c=3$ $b=4$.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ x = -1 \end{cases} \qquad y^2 = \frac{24}{25} \qquad y = \pm \frac{8\sqrt{6}}{5}$$

RESPOSTA: $-1 \pm \frac{8\sqrt{6}}{5} i$

2ª QUESTÃO: item 16 - valor 0,4

ENUNCIADO:

As três raízes da equação

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

são a, b, c. Se, $S_n = a^n + b^n + c^n$, com n inteiro e $n > 3$, calcule K, sendo

$$k = S_n + pS_{n-1} + qS_{n-2} + rS_{n-3}$$

SOLUÇÃO: pela fórmula de NEWTON, $K = 0$

Obs.:

$$k = a^n + b^n + c^n + p(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) + q(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) + r(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3})$$

$$k = (a^n + pa^{n-1} + qa^{n-2} + ra^{n-3}) + (b^n + pb^{n-1} + qb^{n-2} + rb^{n-3}) + (c^n + pc^{n-1} + qc^{n-2} + rc^{n-3})$$

$$k = a^{n-3}(a^3 + pa^2 + qa + r) + b^{n-3}(b^3 + pb^2 + qb + r) + c^{n-3}(c^3 + pc^2 + qc + r)$$

$$k = a^{n-3}(0) + b^{n-3}(0) + c^{n-3}(0)$$

$$k = 0$$

2ª QUESTÃO: item 17 - Valor: 0,4

ENUNCIADO: Calcule as raízes da equação

$$2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 = 0,$$

sabendo que uma das raízes é real, da forma n/d, sendo n e d inteiros, positivos e primos entre si.

SOLUÇÃO:

$n \in \{1, 2, 3, 6\}$

$x \in \{1, 2\}$

$\frac{n}{x} \in \{1, 2, 3, 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -7 & 10 & -6 \\ & 2 & -5 & 5 & \underline{|-1} \end{array}$$

Pelas regras de exclusão

$\frac{n}{x} = \frac{3}{2}$
$$\begin{array}{c|cccc} \frac{3}{2} & 2 & -7 & 10 & -6 \\ & 2 & -4 & 4 & \underline{|0} \end{array}$$

$x_1 = \frac{3}{2}$ $\quad x^2 - 2x + 2 = 0$ $\quad x_{2,3} = 1 \pm i$

RESPOSTA: $\frac{3}{2}, 1 \pm i$

2ª QUESTÃO item 18 _ valor 0,4

ENUNCIADO: Sabendo que a equação $x^3 + mx^2 + n = 0$, em que m e n são reais, admite raízes complexas de módulo β, exprima m em função de n e β.

SOLUÇÃO:

sejam $\beta e^{i\alpha}$, $\beta e^{-i\alpha}$ E γ

AS RAÍZES

$$\begin{cases} 2\beta\cos\alpha + \gamma = -m \\ \beta^2 + 2\beta\gamma\cos\alpha = 0 \\ \beta^2\gamma = -n \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{-n}{\beta^2} \qquad \cos\alpha = \frac{\beta^3}{2n}$$

SUBSTITUINDO

$$m = \frac{n}{\beta^2} - \frac{\beta^4}{n} \qquad (n \neq 0, \beta \neq 0)$$

RESPOSTA: $n \neq 0$, $\beta \neq 0$

2ª QUESTÃO item 19 _ valor 0,4

ENUNCIADO: Calcule o coeficiente de x^6 no desenvolvimento $(1 + x + x^2)^5$

SOLUÇÃO:

$$T = \frac{5!}{\alpha!\beta!\gamma!} 1^\alpha x^\beta (x^2)^\gamma$$

$$T = \frac{5!}{\alpha!\beta!\gamma!} x^{\beta + 2\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 5 \\ \beta + 2\gamma = 6 \end{cases}$$

$\gamma_1 = 1$ $\beta_1 = 4$ $\alpha_1 = 0$ $T_1 = 5x^6$

$\gamma_2 = 2$ $\beta_2 = 0$ $\alpha_2 = 1$ $T_2 = 30x^6$

$\gamma_3 = 3$ $\beta_3 = 0$ $\alpha_3 = 2$ $T_3 = 10x^6$

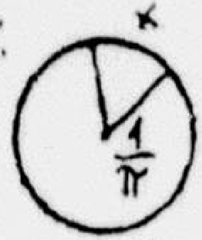
$$T = 45x^6$$

RESPOSTA: 45

2ª QUESTÃO item 20 _ valor 0,4

ENUNCIADO: De um disco com raio $R = \frac{1}{2\pi}$ retire um setor cujo arco é x. Com o restante do disco forme um cone. Calcule o valor de x para que o volume do cone seja máximo. OBS $V = \frac{1}{3}Bh$, sendo B a área da base e h a altura do cone.

SOLUÇÃO:



seja y o arco complementar.

$x + y = 1$

$$g = \frac{1}{2\pi} \quad \pi \mu g = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\, y$$

$$g = \frac{1}{2\pi} \quad \mu = \frac{y}{2\pi} \quad h = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-y^2}$$

$$V = \frac{1}{24\pi^2}\, y^2\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{xV}{xy} = \frac{1}{24\pi^2}\, y\,(2-3y^2)$$

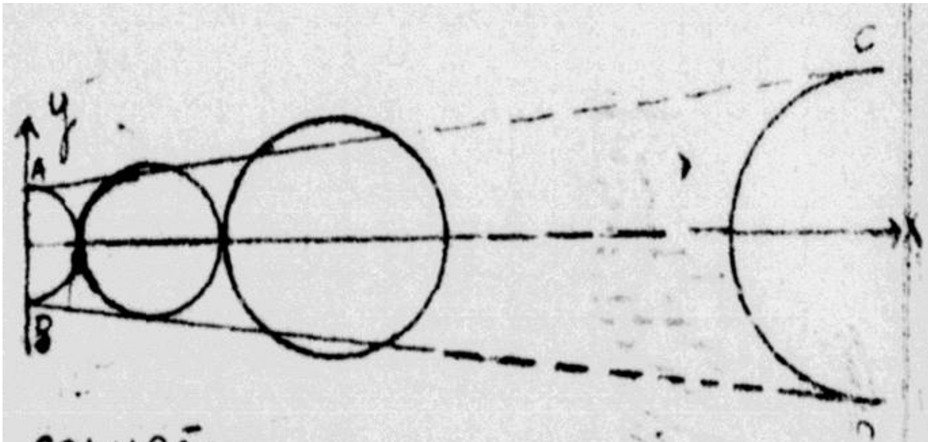
$$\frac{xV}{xy} = 0 \qquad y = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

RESPOSTA: $x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$

3ª QUESTÃO item 21 – valor 0,4

ENUNCIADO: Na figura abaixo, temos n círculos consecutivos e tangentes, cujos diâmetros estão em progressão aritmética de razão 1 e os centros sôbre o eixo dos x. Seja ABCD um trapézio cujas bases $\overline{AB} = 2$ e $\overline{CD}$ são respectivamente os diâmetros do primeiro e do enegésimo círculo. Calcule a área de ABCD em função de n. OBS: Área do trapézio = $\frac{(\text{Base maior}) + (\text{Base menor}) \times \text{altura}}{2}$



SOLUÇÃO

$x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 4 \ldots x_n = n+1$

$b = 2 \quad B = n+1$

$$n = 1 + 3 + 4 + \ldots + n + \frac{n+1}{2} = \frac{(n+3)(n-1)}{2}$$

$$S = \frac{[2 + (n+1)]}{2}\;\frac{(n+3)(n-1)}{2}$$

$$S = \frac{(n+3)^2(n-1)}{4}$$

RESPOSTA: $S = \frac{(n+3)^2(n-1)}{4}$

3ª QUESTÃO item 22 _valor 0,4

ENUNCIADO: Calcule os valores de x e y sabendo que:

$x > y$

$\log_5(x+y) - 2\log_{25} 5 = 0$

$5^{\log_5(x+y)} + \text{anti-}\ln\left(\frac{\log_3 xy}{\log_3 e}\right) +$

$+ \operatorname{colog}_5(x+y) - 5\log_3 9 = 0$

OBS. O símbolo ln significa logaritmo neperiano; e ... base dos logaritmos neperianos.

SOLUÇÃO: $x > y$

$\log_5(x+y) - 1 = 0 \therefore x+y = 5$

$5 + xy - 1 - 10 = 0 \therefore xy = 6$

$x = 3 \quad y = 2$

RESPOSTA: $x = 3 \quad y = 2$

Obs.: $colog_b^a = -log_b^a$ ∴ $antilog_b^a = b^a$ ∴ $antiln(\ln(k)) = e^{\ln(k)} = k$

3ª QUESTÃO item 23 _valor 0,4

ENUNCIADO:

$$G = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$$

Calcule G

SOLUÇÃO: $G = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Obs.: A solução assume que a área sob a parábola x^2 entre x=0 e x=1 foi dividida em n retângulos de base 1/n e altura $(1/n)^2$, $(2/n)^2$, ..., $(n/n)^2$. Quando n→∞, G = área.

Outra solução: Lembrar que $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, daí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n.n.2n}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

3ª QUESTÃO item 24 _valor 0,4

ENUNCIADO: Uma cônica tem por equação $9y^2 - 18y + 25x^2 + 50x - 191 = 0$. Identifique-a e calcule sua excentricidade, se fôr o caso.

SOLUÇÃO:

$9y^2 - 18y + 9 + 25x^2 + 50x + 25 - 225 = 0$

$9(y-1)^2 + 25(x+2)^2 = 225$

$9y'^2 + 25x'^2 = 225$

$\frac{y'^2}{25} + \frac{x'^2}{9} = 1$

$a^2 = 25 \quad c^2 = 16$

$b^2 = 9 \quad e = \frac{c}{a} = 0,8$

RESPOSTA: ELIPSE $e = 0,8$

Obs.: Na 2ª linha, o correto é $9(y-1)^2 + 25(x+1)^2 = 225$

3ª QUESTÃO item 25 – valor 0,4

ENUNCIADO: Seja $A = (\sqrt{3} + i)^{2\alpha}$ onde α é um número real, inteiro e positivo. Sendo A um número real, calcule o valor de α para que as raízes da equação

$$(\alpha + i)^2 x + (3 + i)^2 y = 0$$

sejam também reais. OBS. $i = \sqrt{-1}$

SOLUÇÃO: O PROBLEMA É IMPOSSÍVEL. QUALQUER QUE SEJA α A EQUAÇÃO $(\alpha + i)^2 x + (3 + i)^2 y = 0$ TEM SEMPRE SOLUÇÕES REAIS E SOLUÇÕES COMPLEXAS