1a. QUESTÃO - ITEM 1

Valor 0,6

ENUNCIADO:

Diga, justificando, se a série
1/2 + 3/8 + 15/48 + 105/384 + ...
é convergente ou divergente.

Solução:

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 \quad \text{(nada se pode concluir)}$$

Critério de Raabe:

$$\lim_{n \to \infty} \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \therefore$$

é divergente.

Resposta:

Divergente.

1a. QUESTÃO - ITEM 2

Valor 0,6

ENUNCIADO:

A reta $x - 25/4 = 0$ é uma das diretrizes de uma elipse e (4;0) é o foco associado. O centro está na origem. Ache a equação da elipse.

Solução:

Sabe-se que $\begin{cases} F' \ (-ae, 0) \\ F \ (ae, 0) \end{cases}$ e

$x + \frac{a}{e} = 0$, $x - \frac{a}{e} = 0$, equação da diretriz.

$ae = 4$

$a/e = 25/4$

logo: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 25$

$e^2 = 16/25$

Resposta:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

1a. QUESTÃO - ITEM 3

Valor 0,6

ENUNCIADO:

Seja g uma função real de variável real, par (isto é: $g(x) = g(-x)$) e derivável.

Prove que sua derivada g' é uma função ímpar (isto é: $g'(-x) = -g'(x)$).

Solução:

Da definição de derivada, $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

e $g'(-x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(-x+h) - g(-x)}{h}$.

Mas g é par : $g(x) = g(-x)$.

$g(-x+h) = g(x-h)$

Assim: $g'(-x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x-h) - g(x)}{h} = -\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x-h) - g(x)}{-h}$ (1)

1a. QUESTÃO - ITEM 3

Valor 0,6

Da teoria dos limites (já que, se $h \neq 0$ então $-h \neq 0$).

Então: $$\lim_{h \to 0} \frac{g(x-h) - g(x)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x-h) - g(x)}{h} \quad (2).$$

De (1) e (2), segue-se

$$g'(-x) = -\lim_{h \to 0} \frac{g(x-h) - g(x)}{h} = -g'(x),$$

e, portanto, g' é uma função ímpar.

1a. QUESTÃO - ITEM 4

Valor 0,6

ENUNCIADO:

Seja f a função definida na coleção dos números reais, tal que:

i) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

ii) $f(0) = 0$.

1) Determine a função f' derivada de f.

2) Diga, justificando, se f' é ou não contínua.

Solução:

1) Tem-se: $f'(x) = x^2\left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $\therefore$

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[h \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{h}\right] = 0 \cdot \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{h})$$

Assim: $$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

2) A função derivada existe em $x = 0$, mas:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left[2x \text{ sen } 1/x - \cos 1/x\right] = \lim_{x\to 0} (2x \text{ sen } 1/x) - \lim_{x\to 0} (\cos 1/x);$$ êste limite não existe, pois

$$\lim_{x\to 0} \cos (1/x) \text{ não existe.}$$

Conclui-se que f' não é contínua na coleção dos números reais, pois não é contínua em $x = 0$.

Resposta:

1) $f'(x) = \begin{cases} 2x\text{sen } 1/x - \cos 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

2) Não: $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ não existe.

1a. QUESTÃO - ITEM 5

Valor 0,6

ENUNCIADO:

Resolva a equação

$$x^{10} - 2x^9 + 2x^8 + x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 12x^2 + 24x - 24 = 0,$$

a qual admite uma raiz complexa de módulo $\sqrt{2}$ e argumento $\pi/4$.

Solução:

i) Raízes conjugadas: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2}\,(\cos \pi/4 + \text{sen } \pi/4) = 1 + i \\ x_2 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 - i \end{cases}$

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2) \cdot Q(x)$$

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x^2-2x+2} = x^8 + x^4 - 12 = 0$$

ii) Raízes de $x^8 + x^4 - 12 = 0$

$$x^4 = y \Longrightarrow y^2 + y - 12 = 0 \quad \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

Segue-se: $x_{3,4,5,6} = \sqrt[4]{3}\,\left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$

$x_3 = \sqrt[4]{3}$

$x_4 = \sqrt[4]{3}\, i$

$x_5 = -\sqrt[4]{3}$

$x_6 = -\sqrt[4]{3}\, i$

$$x_{7,\ 9,10} = \sqrt[4]{-4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2K+1)\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{RK+1)\pi}{4}\right),\ = 0,1,2,3$$

$x_7 = 1 + i$ $\qquad x_9 = 1 - i$

$x_8 = -1 + i$ $\qquad x_{10} = -1 - i$

Resposta:

$x_1 = 1+i \quad x_4 = \sqrt[4]{3}\,i \quad x_7 = 1+i$

$x_2 = 1+i \quad x_5 = -\sqrt[4]{3} \quad x_8 = -1+i$

$x_3 = \sqrt[4]{3} \quad x_6 = -\sqrt[4]{3}\,i \quad x_9 = 1-i$

$x_{10} = -1-i$

2a. QUESTÃO - ITEM 1

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Determine a transformação em $kx+h$ da equação $x^3 + 4x^2 - 12x + 160 = 0$, de tal forma que, se $2 - 4i$ fôsse raiz dessa equação, a raiz correspondente da equação transformada seria $0,9+0,2i$.

OBSERVAÇÃO: $i = \sqrt{-1}$

Solução:

Transformação $y = kx + h$

$0,9 + 0,2i = 2k - 4ki + h$

$$\begin{cases} 0,9 = 2k + h \\ 0,2 = -4k \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 1 \\ k = -1/20 \end{cases}$$

Transformada em $y = -x/20$

$$-8000x^3 + 1600x^2 + 240x + 160 = 0$$

$$100x^3 - 20x^2 - 3x - 2 = 0$$

Transformada em $y = x + 1$

	100	-20	-3	-2
-1	100	-120	-117	-119
	100	-220	337	
	100	-320		
	100			

Resposta:

$$100x^3 - 320x^2 + 337x - 119 = 0$$

2a. QUESTÃO - ITEM 2

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Seja f uma função real de variável real, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ |x|, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

Determine a função F, real de variável real, cuja derivada seja f, de modo que $F(0) = 0$.

Solução

A derivada de F é f, então:

$$F = \int f dx$$

$$F(x) = \int (x+2)\, dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 \,, \quad x < -1$$

$$F(x) = \int -(x)\, dx = -\frac{x^2}{2} + C_2 \,, \quad -1 \leq x \leq 0$$

$$F(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_3 \,, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$F(x) = \int 2dx = 2x + C_4 \,, \quad x > 1$$

Sendo $F(0) = 0$, $-\frac{x^2}{2} + C_2 = 0$

$$\frac{x^2}{2} + C_3 = 0$$

logo: $C_2 = C_3 = 0$

No entanto, se F é derivável, é contínua.

Assim:

$$\lim_{x \to (-1)^-} F(x) = F(-1)$$

$$\therefore \lim_{x \to (-1)^-} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + C_1\right) = -\frac{(-1)^2}{2} = \frac{-1}{2}$$

Então: $\frac{1}{2} - 2 + C_1 = -1/2 \therefore C_1 = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} F(x) = F(1) \therefore \lim_{x \to 1^+} (2x + C_4) = 1/2$$

$$2 + C_4 = 1/2 \therefore C_4 = -3/2$$

Finalmente:

Resposta:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 2x + 1, & x < -1 \\ -\frac{x^2}{2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{3}{2}, & x > 1. \end{cases}$$

2a. QUESTÃO - ITEM 3

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Seja m um inteiro maior que zero. Calcule o valor do somatório dos inversos dos cubos das raízes da equação

$mx^4 + 8x^3 - 139x^2 - 18x + 9 = 0$ (sem resolvêla).

Solução:

Transformada recíproca: $9x^4 - 18x^3 - 139x^2 + 8x + m = 0$

ou $x^4 - 2x^3 - 139/9\, x^2 + 8/9\, x + m/9 = 0$.

Sejam a_1, a_2, a_3, a_4, as raízes dessa transformada.

Ora,

$$(\sum a_i)^3 = \sum a_i^3 + 3 \sum_{i \neq j} a_i^2 a_j + 6 \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k$$

Porém:

$$\sum_{i \neq j} a_i^2 a_j = (\sum a_i)(\sum_{i<j} a_i a_j) - 3 \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k$$

Então: $$\sum a_i^3 = (\sum a_i)^3 - 3(\sum a_i)(\sum_{i<j} a_i a_j) + 3 \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k =$$

$$= (-2)^3 - 3(2)\left(-\frac{139}{9}\right) + 3\left(-\frac{8}{9}\right) = 8 + \frac{278}{3} - \frac{8}{3} = \frac{294}{3} = 98$$

Resp: 98

2a. QUESTÃO - ITEM 4

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Sejam r, m, p números reais maiores que zero, A a coleção dos pares (x,y) de números reais tais que $x + y = r$ e f a função cujo conjunto de definição é A e que associa a cada par (x,y) de A o número $x^m\, y^p$. Mostre que f tem máximo quando

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{p}.$$

Solução:

Sendo $y = r - x \ldots (1)$

tem-se: $f : (x,y) \in A \longrightarrow x^m y^p \quad \ldots (2)$

De (2) e (1) pode-se definir:

$g(x) = f(x, r-x) = x^m (r-x)^p$ ... (3)

Derivando g em relação a x:

$g'(x) = mx^{m-1}(r-x)^p - px^m(r-x)^{p-1} = x^{m-1}(r-x)^{p-1}\left[m(r-x)-px\right]$ .... (4)

Observa-se que a condição $\frac{x}{m} = \frac{y}{p}$, isto é:

$px = my = m(r-x)$, impõe: $g'(x) = 0$

Isto é: a função g tem um ponto crítico em

$px = mr - mx$, i.e.: $x_o = \frac{mr}{m+p}$ ... (5)

Sendo $g''(x) = \left[m(r-x) - px\right](r-x)^{p-1}.(m-1)x^{m-2} + x^{m-1}\left[m(r-x) - px\right](p-1)(r-x)^{p-2} + x^{m-1}(r-x)^{p-1}\left[m(-1) - p\right]$,

tem-se: $g''(x_o) = \left(\frac{mr}{m+p}\right)^{m-1}\left(\frac{p}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m}r}{m+p}\right)^{p-1}(-m-p) =$

$= -(m+p)\left(\frac{mr}{m+p}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{pr}{m+p}\right)^{p-1}$

Do enunciado, tem-se que $g''(x_o) < 0$, logo, x_o é abcissa de máximo para a função g.

2a. QUESTÃO - ITEM 5

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Sejam: A o conjunto dos números reais x, tais que $x^2 - 7 \neq 0$; B o conjunto dos números reais x, tais que $x^2 + 4x - 5 \geq 0$; F e G funções cujos conjuntos de definição são A e B respectivamente, tais que:

$F(x) = \frac{x^2}{x^2 - 7}$ e $G(x) = -\sqrt{x^2 + 4x - 5}$.

Determine o conjunto de definição da função H, composta de G com F (isto é, $H(t) = F(G(t))$).

Solução:

Para que a composta seja definida:

i) $t \in \arg G \Longrightarrow t^2 + 4t - 5 \geq 0$, logo:

$t \leq -5$ ou $t \geq 1$ ... (1)

ii) $G(t) \in \arg F \Longrightarrow (G(t))^2 - 7 \neq 0$, logo:

$t^2 + 4t - 5 - 7 \neq 0$ ou seja: $t \neq -6$ e $t \neq 2$ ... (2)

De (1) e (2), segue-se:

$\arg H = (-\infty; -6) \cup (-6; -5] \cup [1;2) \cup (2; +\infty)$

Resposta:

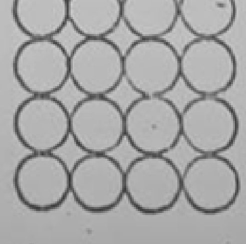
$\arg H = (-\infty;-6) \cup (-6;-5] \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$

2a. QUESTÃO - ITEM 6

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Uma pilha de esferas iguais é obtida dispondo-se as esferas em camadas sucessivas, de tal forma que a camada inferior forme um "quadrado" com $4n^2$ esferas, conforme é ilustrado pela figura, para n=2, e apoiando-se camadas sucessivas sôbre a primeira, de tal modo que cada esfera de uma camada se apoie sôbre quatro esferas da imediata abaixo. Sabendo-se que a expressão $An^3 + Bn^2 + Cn + D$ indica o número de esferas contidas nas n primeiras camadas da pilha, determine os valores numéricos das constantes A, B, C e D.



Solução:

1a. camada: $2n \times 2n = (2n)^2$

2a. camada: $(2n-1)^2$

.

.

.

Na. camada: $\left[2n-(n-1)\right]^2$

Tem-se, pois: $\sum_{m=1}^{n}\left[2n-(m-1)\right]^2 =$

$= \sum_{m=1}^{n}\left[4n^2 - 4n(m-1) + (m^2-2m+1)\right] = \sum_{m=1}^{n}\left[4n^2+4n+1\right) +$

$+ (m^2-4nm-2m) = n\left[4n^2+4n+1\right] + \sum_{m=1}^{n}(m^2-4nm-2m) = 4n^3 +$

$+ 4n^2 + n + \sum_{m=1}^{n} m^2 - 4n\sum_{m=1}^{n} m - 2\sum_{m=1}^{n} = 4n^3 + 4n^2 + n + \sum_{m=1}^{n} m^2 +$

$- \left(\sum_{m=1}^{n} m\right)(4n+2) \quad \ldots \quad (1)$

Mas: $\sum_{1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \times 2 \times 3}$; $\sum_{1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2} \quad \ldots \quad (2)$

Do (2) em (1): $\sum_{m=1}^{n}\left[2n-(m-1)\right]^2 = 4n^3 + 4n^2 + n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +$

$- \frac{n(n+1)}{2}(4n+2) = 24n^3 + 24n^2 + 6n + 2n^3 + 3n^2 + n - 12n^3 - 18n^2 +$

$- 6n = (1/6)(14n^3 + 9n^2 + n) = (7/3)n^3 + (3/2)n^2 + (1/6)n.$ Daí e do estudo de polinômios: $A = \frac{7}{3}$, $B = \frac{3}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = 0$.

Resposta:

$A = 7/3 \quad B = 3/2 \quad C = 1/6 \quad D = 0$

3a. QUESTÃO - ITEM 1

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Calcule a área da superfície delimitada pelos gráficos de:

$$9x^2 + 16y^2 - 24xy - 20x - 15y = 0 \quad \ldots (1)$$

e

$$2x - 11y + 15 = 0 \quad \ldots (2)$$

Solução

i) rotação de eixos: $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-24}{9-16} = \frac{24}{7}$

$\cos\theta = 4/5$; $\operatorname{sen}\theta = 3/5$

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x = (1/5)(4x' - 3y') \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \Rightarrow y = (1/5)(3x' + 4y') \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

De (3) em (1):

$$(9/25)(4x' - 3y')^2 + (16/25)(3x' + 4y')^2 - (24/25)(4x' - 3y') \cdot (3x' + 4y') - (20/5)(4x' - 3y') - 3(3x' + 4y') = 0$$

Desenvolvendo e simplificando:

$$625y'^2 - 625x' = 0 \quad \text{ou:} \quad x' = y'^2 \quad \ldots (4)$$

De (3) em (2), tem-se: $(2/5)(4x' - 3y') - 11/5(3x' + 4y') + 15 = 0$

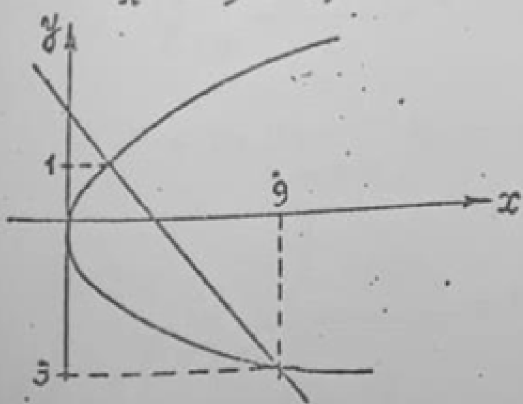
ou: $x' + 2y' - 3 = 0 \quad \ldots (5)$

Então: $\begin{cases} x' = y'^2 \\ x' + 2y' - 3 = 0 \end{cases}$

$x' = 3 - 2y'$

$$S = \int_{-3}^{1} (3 - 2y - y^2)\, dy = 5/3 + 9 = 32/3$$

unidades de área.



Resposta:

32/3 unidades de área.

3a. QUESTÃO - ITEM 2

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Sabe-se que

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = e\sqrt{2} \;;$$

$$\lim_{k \to +\infty} b_k = 2\sqrt{e} \;;$$

$$\lim_{h \to +\infty} \sum_{j=1}^{h} p_j = +\infty, \quad p_j > 0,$$

qualquer que seja $j = 1, 2, 3, \ldots$

Calcule

$$\lim_{\ell \to +\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\ell} a_i b_i}{\ell} + \frac{\sum_{i=1}^{\ell} p_i b_i}{\sum_{i=1}^{\ell} p_i} \right)$$

Solução:

1 - Se $\lim_{n \to +\infty} z_n = \xi$, então $\lim_{\ell \to +\infty} \dfrac{\sum_{n=1}^{\ell} z_n}{\ell} = \xi$

Mas $\lim_{i \to +\infty} (a_i b_i) = (\lim_{i \to +\infty} a_i)(\lim_{i \to +\infty} b_i) = e\sqrt{2}\,(2\sqrt{e})$

Então, $\lim_{\ell \to +\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{\ell} a_i b_i}{\ell} = 2e\sqrt{2e}$

2 - Se $\lim_{i \to +\infty} b_i = \beta$ e $\lim_{\ell \to +\infty} \sum_{i=1}^{\ell} p_i = +\infty$, $p_i > 0$

então: $\lim_{\ell \to +\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{\ell} p_i b_i}{\sum_{i=1}^{\ell} p_i} = \beta = 2\sqrt{e}$

3 - Logo, por (1) e (2), $\lim\limits_{\ell \to \infty} \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\ell} a_i b_i}{\ell} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\ell} p_i b_i}{\sum\limits_{i=1}^{\ell} p_i} \right) =$

$$= 2e\sqrt{2e} + 2\sqrt{e} = 2\sqrt{e}(e\sqrt{2} + 1)$$

Resposta:

$2\sqrt{e}(e\sqrt{2} + 1)$

3a. QUESTÃO - ITEM 3

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Conforme a figura abaixo, considere um triângulo retângulo isósceles ABC e o círculo β a êle circunscrito; sôbre a circunferência toma-se um ponto M distinto de A, B ou C de tal modo que as retas MA, MB e MC cortem as retas BC, CA e AB nos pontos A', B' e C' respectivamente. Considere-se o círculo Γ_M que passa por A', B' e C'. Mostre que, quando M descreve o círculo β, nas condições acima, os círculos Γ_M têm os seus centros sôbre uma reta fixa e cortam ortogonalmente um círculo fixo.

Solução:

A equação do círculo circunscrito ao ΔABC é:

$$x^2 + y^2 - a(x + y) = 0.$$

O ponto M descrevente será determinado analiticamente pela reta AM com coeficiente angular λ

$$x_M = \frac{a\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2+1} \qquad y_M = \frac{a\lambda(\lambda-1)}{\lambda^2+1},$$

Determinam-se as coordenadas de A' B' e C' pelas retas que se interceptam:

C' ; Intercessão de $\begin{cases} MC \ldots & y = \dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\, x \quad (\lambda \neq -1) \\ AB \ldots & y = -(x-a) \end{cases}$

$x_{C'} = \dfrac{a(1+\lambda)}{2\lambda} \qquad y_{C'} = \dfrac{a(\lambda-1)}{2\lambda} \qquad (\lambda \neq 0)$

B': $x_{B'} = \lambda a$; $y_{B'} = 0$ . . A': $x_{A'} = -\lambda a$; $y_{A'} = -\lambda a$

Vê-se que $x_{B'} = -y_{A'}$, para todos os valores de $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq -1$.

Logo o centro do círculo está sôbre a perpendicular ao meio da corda A' B' : $\boxed{x + y = 0}$

A equação de Γ_M terá a forma geral

$$x^2 + y^2 - 2h(x - y) + F = 0.$$

Resolvendo a equação para os dois pontos C' e A' por exemplo, achamos $F = \dfrac{a^2}{2}$ o que indica que o círculo é ortogonal ao círculo fixo

$$x^2 + y^2 - a^2/2 = 0 .$$

3a. QUESTÃO - ITEM 4

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Seja Π um polígono plano convexo de $p + 1$ lados, $p \geq 2$. Em função explícita exclusivamente de p e de constantes numéricas, determine de quantas maneiras (diferentes) se pode decompor Π em triângulos por meio de diagonais que não se cortem no interior de Π. Se $p + 1 = 3$, pressupor que o número de decomposições em causa é 1(um)

Solução:

Seja D_h a quantidade de decomposições de um polígono de h lados. Se um polígono tem p lados, contando-se as decomposições que contêm os diagonais tiradas de um dado vértice, repetindo-se a contagem para cada vértice e levando-se em consideração as repetições, obtem-se finalmente,

$$\therefore D_p = \frac{p(D_3D_{p-1}+D_4D_{p-2}+\ldots+D_{p-2}D_4+D_{p-1}D_3)}{2p-6} .$$

Logo

(1) $D_3D_{p-1}+D_4D_{p-2}+\ldots+D_{p-2}D_4+D_{p-1}D_3 = \dfrac{2p-6}{p} \cdot D_p$

Se um polígono tem p+1 lados, contando-se as decomposições que contêm triângulos dos quais toma parte sempre um lado fixado do polígono, obtem-se

$$D_{p+1} = D_p+D_3D_{p-1}+D_4D_{p-2}+\ldots+D_{p-2}D_4+D_{p-1}D_3+D_p .$$

Daí e de (1),

$$\therefore D_{p+1} = 2^{p-1}\frac{1.3.5\ \ldots(2p-3)}{p!} .$$

Dado o interêsse que pode suscitar o problema, oferecemos aqui uma análise mais detalhada da solução.

1. Seja P um polígono (entenda-se, plano convexo) de m lados, $m \geq 3$, tal que os vértices de P numa certa orientação prè-fixada são

$$A_1 , A_2 , \ldots , A_m .$$

1.01. Admitamos levada a efeito uma certa decomposição (compreenda-se, do tipo em causa) de P e seja k o número de triângulos que entram na decomposição de P. Ora, a soma dos ângulos internos dos triângulos componentes é igual à soma dos ângulos internos de P. Então:

$$180\ (m-2) = k \cdot 180.$$

Logo

$$k = m - 2,$$

o que mostra do resto que tôdas as decomposições de polígonos quaisquer de m lados são formadas sempre com o mesmo número $m - 2$ de triângulos.

1.02. Ademais, se ligarmos A_1, por intermédio de diagonais, à cada um dos $m - 2$ vértices

$$A_2, \dots, A_{m-1},$$

vê-se que obtemos de fato uma das decomposições procuradas, que mostra a existência de pelo menos uma decomposição (do tipo em causa), qualquer que seja o polígono de m lados que se considere.

1.03. Seja então dada uma decomposição de P. Como o número de triângulos que entram na decomposição é $m - 2$ então a quantidade total de lados dêsses triângulos é $3(m-2) = 3m - 6$. Mas nesse total cada um dos lados de P participa uma e uma só vez. Logo

$$3m - 6 - m = 2m - 6$$

é o número de lados, daquele total, formado por diagonais do P. Como cada diagonal de P contribui na formação de 2 triângulos, então em cada decomposição de P participam

$$\frac{2m - 6}{2} = m - 3$$

diagonais.

1.04. Note-se agora que se $m = 3$, então cada polígono de m lados admite uma e uma só decomposições. Seja agora $m = h \geq 4$. Admitamos que para cada i, $3 \leq i < h$, cada polígono com i lados admite a mesma quantidade de decomposição, e seja δ a sequência tal que $\arg\delta = \{3, \dots, h-1\}$ e tal que qqs $i = 3, \dots, h-1$ então δ_i é a quantidade de decomposições de um qualquer polígono de i lados. A quantidade decomposição de P do que faz parte a diagonal A_1A_3 é $\delta_3\delta_{h-1}$; aquela quantidade de que faz parte a diagonal A_1A_4 é $\delta_4\delta_{h-2}$; ...; aquela do que faz parte a diagonal A_1A_{h-2} é $\delta_{m-2}\delta_4$; aquela de que faz parte a diagonal A_1A_{h-1} é $\delta_{h-1}\delta_3$. Somando-se tôdas as decomposições obtemos o número

$$\delta_3\delta_{h-1} + \delta_4\delta_{h-2} + \dots + \delta_{h-2}\delta_4 + \delta_{h-1}\delta_3 .$$

Reiterando-se o procedimento para cada um dos h vértices de P, obtemos o número

$$h(\delta_3\delta_{h-1} + \delta_4\delta_{h-2} + \dots + \delta_{h-2}\delta_4 + \delta_{h-1}\delta_1) .$$

Mas cada decomposição se repete – com a aplicação do processo descrito – tantas vêzes quantos são as extremidades das $h - 3$, diagonais que entram em jôgo em cada decomposição, ie,

$$2(h - 3) = 2h - 6$$

Assim a quantidade total de decomposição é (com $h \geq 4$),

$$(1) \quad \Delta = \frac{h(\delta_3\delta_{h-1} + \delta_4\delta_{h-2} + \dots + \delta_{h-2}\delta_4 + \delta_{h-1}\delta_3)}{2h - 6}$$

1.05. O resultado imediatamente atraz mostra de resto que para cada $i \geq 3$, todos os polígonos de i lados admitem a mesma quantidade de decomposição. – Seja então D a sequência tal que

$$\arg D = \{ i \in \mathbb{N} \mid i \geq 3 \} ;$$

e tq qqs $i \in \arg D$, D_i é a quantidade de decomposições de um polígono qualquer de i lados. De (1), se $h \geq 4$,

$$D_h := \frac{h(D_3D_{h-1} + D_4D_{h-2} + \dots + D_{h-2}D_4 + D_{h-1}D_3)}{2h - 6}$$

e logo

$$(2)\quad D_3D_{h-1} + D_4D_{h-2} + \dots + D_{h-2}D_4 + D_{h-1}D_3 = \frac{2h-6}{h} \cdot D_h$$

1.06. Seja agora $m = h + 1$, com $h \geq 4$. A quantidade de decomposições de P de que participam o $\Delta A_1A_2'A_3$ é D_h; aquela quantidade de que participam o $\Delta A_1A_2A_4$ é D_3D_{h-1}; aquela de que participam o $\Delta A_1A_2A_5$ é D_4D_{h-2}; ...; aquela de que participam o $\Delta A_1A_2A_{h-1}$ é $D_{h-2}D_4$; aquela de que participam o $\Delta A_1A_2A_h$ é $D_{h-1}D_3$; aquela de que participam o $\Delta A_1A_2A_{h-1}$ é D_h.

Vê-se então que o número total de decomposições de P é

$$D_{h+1} = D_h + D_3D_{h-1} + D_4D_{h-2} + \dots + D_{h-2}D_4 + D_{h-1}D_3 + D_h .$$

Daí e de (2),

$$D_{h+1} = 2D_h + \frac{2h-6}{h} D_h$$

Logo,

$$D_{h+1} = \frac{2(2h-3)}{h} \cdot D_h .$$

Então

$$D_5 = \; = 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot D_4$$

$$D_6 = \; = 2 \cdot \frac{7}{5} \cdot D_5$$

$$\vdots$$

$$D_{h+1} = \; = 2 \cdot \frac{(2h-3)}{h} \cdot D_h$$

Então

$$D_{h+1} = 2^{h-3} \cdot \frac{5 \cdot 7 \cdot \dots (2h-3)}{4 \cdot 5 \cdot \dots h} \cdot D_4$$

Donde

$$D_{h+1} = 2^{h-2} \cdot \frac{3.5.7. \ldots .(2h-3)}{2.3.5. \ldots .h} \cdot D_4$$

Mas como se vê, $D_4 = 2$, e daí,

$$D_{h+1} = 2^{h-1} \cdot \frac{3.5.7. \ldots .(2h-3)}{h!}$$

fórmula essa que se mantém válida, digamos assim, também quando $h = 3$ e quando $h = 2$.

<u>Resp:</u>

$$D_{p+1} = 2^{p-1} \cdot \frac{1.3.5.7. \ldots .(2p-3)}{p!}$$