IME 1967

PROVA DE ÁLGEBRA

1a. QUESTÃO - ITEM 1

Valor 0,3

ENUNCIADO:

Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & 5 & 11 \\ 3 & 5 & -9 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

SOLUÇÃO:

RESPOSTA: 0

1a. QUESTÃO - ITEM 2

Valor 0,3

ENUNCIADO:

Calcule: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-1/x)^x}{(1+1/x)^x}=\frac{e^{-1}}{e}$$

RESPOSTA: e^{-2}

1a. QUESTÃO - ITEM 3

Valor 0,3

ENUNCIADO:

O ponto Q(2,1) pertence à cônica de equação $4x^2+30xy+4y^2-210x+210y = 210$. Determine as novas coordenadas do Q, após transformação que elimine o têrmo em xy.

SOLUÇÃO: (uma)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{B}{A-B} = \frac{30}{4-4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x'.\cos\theta - y'.\operatorname{sen}\theta \\ y = x'.\operatorname{sen}\theta + y'.\operatorname{sen}\theta \end{array}\right/ \Longrightarrow \left/\begin{array}{l} x' - y' = 2\sqrt{2} \\ x' + y' = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

RESPOSTA:

$$x' = \frac{3\sqrt{2}}{2} \; ; \; y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1a. QUESTÃO - ...

Valor 0,3

ENUNCIADO:

Seja 64 a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(x+y)^m$, onde $\underline{m}$ é um número natural. Supondo-se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ números positivos, o terceiro e o sétimo têrmos do desenvolvimento de $(a+b)^m$ segundo as potências decrescentes de $\underline{b}$ serão $T_3 = 60$ e $T_7 = 64$. Determine $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

SOLUÇÃO:

$2^m = 64 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow 7$ têrmos

$T_7 = a^m = a^6 = 64 \Rightarrow a = 2$

$$T_3 = \frac{m.(m-1)}{2} . a^2 b^3 = \frac{6 \times 5}{2} \times 4b^3 = 60 \Rightarrow b^3 = 1 .$$

RESPOSTA: $a = 2$

$b = 1$

1a. QUESTÃO - ITEM 5

Valor 0,3

ENUNCIADO:

Seja uma função f tal que $|f(a) - f(x)| \leq (a-x)^2$, para quaisquer números reais $\underline{x}$ e $\underline{a}$. Calcule a derivada de f no ponto 2.

Observações: $|X|$ indica o valor absoluto do número X; tôdas as funções são reais de variável real.

SOLUÇÃO:

RESPOSTA: 0.

1a. QUESTÃO - ITEM 6

Valor 0,3

ENUNCIADO:

Forme a equação recíproca de menor grau que admite como raiz o maior dos restos das divisões de $P(x)$ por $(2x-1)$ e por $(x+1)$, sendo $P(x) = 16x^6 - 4x^4 + 16x - 1$.

SOLUÇÃO:

$$R_1 = P(+1/2) = 16.\ 1/64 - 4.\ 1/16 + 16.\ 1/2 - 1 = 7$$

$$R_2 = P(-1) = 16 - 4 - 16 - 1 = -5$$

$$\gamma_1 = 7 \Longrightarrow \gamma_2 = 1/7$$

$x^2 + px + q = 0$

$q = 1$

$P = -(7 + 1/7) = -50/7$

RESPOSTA: $x^2 - 50/7\,x + 1 = 0$

1a. QUESTÃO - ITEM 7

Valor 0,3

ENUNCIADO:

Calcule, entre os limites $-0,7$ e $0,8$, a integral da função G definida por

$$G(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3 + x^{4n}}$$

SOLUÇÃO:

$$\int_{-0,7}^{0,8} G(x) \cdot dx = 1/3 \int_{-0,7}^{0,8} dx$$

RESPOSTA: 0,5

1a. QUESTÃO - ITEM 8

Valor 0,3

ENUNCIADO:

Seja A_n a área da superfície do polígono plano P_n cujos vértices são as raízes da equação $\sqrt{7} + 3i - x^{2n} = 0$, $n \geq 2$.

Calcule $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

Observação: $i = \sqrt{-1}$

SOLUÇÃO:

$$x^{2n} = \sqrt{7} + 3i \Longrightarrow \left| x^{2n} \right| = \sqrt{7+9} \Longrightarrow \left| x^{n} \right| = 2$$

$$R_n = \left| \sqrt[n]{2} \right| = 2^{1/n}$$

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 1$$

RESPOSTA: π

1a. QUESTÃO - ITEM 9

Valor 0,3

ENUNCIADO:

Calcule a soma da série $\sum \dfrac{225}{n^2 + 5n + 6}$.

SOLUÇÃO:

Consideremos a série a partir de n = 1.

$$\frac{225}{(n+2).(n+3)} = 225 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$u_1 = 1/3 - \cancel{1/4}$

$u_2 = \cancel{1/4} - \cancel{1/5}$

.

.

$u_n = \cancel{1/n+2} - 1/n+3$

$S'_n = 1/3 - 1/n+3 \Longrightarrow S_n = \dfrac{225n}{3n+9}$

$$S' = \lim_{x \to \infty} S$$

RESPOSTA: $S = 75$

2a. QUESTÃO - ITEM 10

Valor 0,5

ENUNCIADO:

Calcule $\underline{m}$ e $\underline{n}$ de modo que $x^4 + x^3 + mx^2 + nx - 2$ seja divisível por $x^2 - x - 2$.

SOLUÇÃO:

$$P(x) = Q(x).(x^2-x-2) = (x^2+px+q).(x^2-x-2) =$$

$$= x^4+(p-1)x^3+(q-p-2)x^2+(-q-2p)x-2q$$

$$\left.\begin{array}{l} p - 1 = 1 \\ q - p - 2 = m \\ q + 2p = - n \\ - 2q = - 2 \end{array}\right| \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} p = 2 \\ m = - 3 \\ n = - 5 \\ q = 1 \end{array}\right.$$

RESPOSTA: $m = - 3$

$n = - 5$

2a. QUESTÃO - ITEM 11

Valor 0,5

ENUNCIADO:

Dados $A(2,0)$ e $B(-2,0)$ e a elipse $\dfrac{(x-6)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

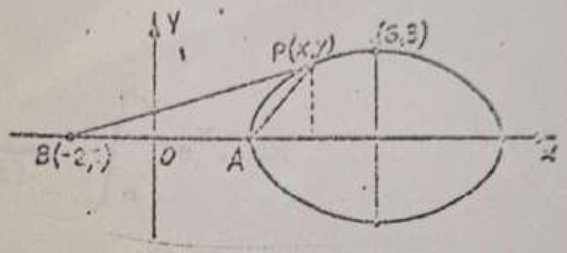
pode-se determinar os pontos P_i (i = 1,2,3,) da curva tais que reta AP_i tenha coeficiente angular igual ao triplo do coeficiente da reta BP_i .

SOLUÇÃO:

$$\frac{y}{x-2} = 3\,\frac{y}{x+2}\ ,\quad x \neq \pm 2$$

$$y.\,(x+2) = 3y.\,(x-2)$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} y = 0 \\ \\ x = 4 \end{array}\right. \quad \text{ou}$$



$$x = 4 \Longrightarrow 1/4 + y^2/9 = 1$$

$$\Longleftrightarrow 4y^2 = 36 - 9$$

$$\Longleftrightarrow y = \pm\,\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

RESPOSTA: $P_1(10;0)$; $P_2\left(4;\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_3\left(4;\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

2a. QUESTÃO - ITEM 12

Valor 0,5

ENUNCIADO:

Seja F uma função tal que $F(x)+F(y) = F(x.y)$

$F(x^y) = y.F(x)$.

Sabe-se que $F(-1) = 2$. Calcule $F(\log 0{,}001 + \operatorname{sen} \pi/2)$.

Observação: log N é o logaritmo decimal do número N.

SOLUÇÃO:

$F(-1) = -1 . F(1) = 2 \Rightarrow F(1) = -2$

$F(\log 0{,}001) = F(-3) = -3 . F(1) = 6$

RESPOSTA: 4

2a. QUESTÃO - ITEM 13

Valor 0,5

ENUNCIADO:

Calcule $\lim\limits_{y \to a} \dfrac{ay}{(y-a)} \displaystyle\int_a^y e^x . dx$

Observações: a é uma constante ;

e é a base dos logarítmos neperianos.

SOLUÇÃO:

L' Hôpital

$$\lim_{y \to a} \frac{a. \int_a^y e^x dx + ay.e^y}{1}$$

RESPOSTA: $a^2.e^a$

2a. QUESTÃO - ITEM 14

Valor 0,5

ENUNCIADO:

De quantas maneiras 3 rapazes e 2 moças podem ocupar 7 cadeiras em fila, de modo que as moças sentem juntas umas das outras , e os rapazes juntos uns dos outros.

SOLUÇÃO:

$\boxed{1}$. 2 $\qquad P_2 \cdot P_3 \cdot C_3^1$ $\qquad P_2 \cdot P_3 \cdot (C_3^1 + C_2^1 + C_1^1) =$

2 . 3 $\qquad P_2 \cdot P_3 \cdot C_2^1$ $\qquad = 2 \times 6 \times (3 + 2 + 1) =$

3 4 . $\qquad P_2 \cdot P_3 \cdot C_1^1$ $\qquad = 12 \times 6$

RESPOSTA: 72

2a. QUESTÃO - ITEM 15

Valor 0,5

ENUNCIADO:

Sendo as coordenadas do ponto $P(x,y)$ definidas por $x=2a\ tg\ u$ e $y=2a\ cos^2 u$ pode-se calcular o valor de $\frac{d^2y}{dx^2}$ no ponto zero.

SOLUÇÃO:

$dy = -4a.\ cos\ u.\ sen\ u\ du$

$dx = 2a.\ sec^2\ u\ du$ $\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -2\ cos^3\ u\ sen\ u$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2(-3\ cos^2\ u\ sen^2\ u + cos^4\ u).\ \frac{cos^2\ u}{2a} =$$

$$= (3\ cos^2\ u\ sen^2\ u - cos^4\ u)\ .\ \frac{cos^2\ u}{a}$$

RESPOSTA: $-1/a$

3a. QUESTÃO - ITEM 16

Valor 0,5

ENUNCIADO:

Entre os números 3 e 192 injere-se igual número de meios aritméticos e geométricos com razões r e q respectivamente. Sabe-se que o terceiro têrmo do desenvolvimento de $(1 + 1/q)^8$ em potências crescentes de $1/q$ é $r/9q$. Pode-se determinar as progressões.

SOLUÇÃO:

$$3 = n + 1 \Longrightarrow n = 2$$

$$T_3 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} \cdot (1/q)^2 \cdot 1^6 = \frac{28}{q^2} \Longleftrightarrow \frac{28}{q^2} = \frac{r}{9q}$$

$$\Longleftrightarrow q \cdot r = 252 \Longleftrightarrow r = \frac{252}{q}$$

$$q = \sqrt[m+1]{b/a} \quad \text{e} \quad r = \frac{b-a}{m+1} \text{ , onde } \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 192 \end{array}$$

$$m + 1 = \frac{b-a}{r} \Longrightarrow q = \sqrt[\frac{b-a}{r}]{b/a} = \sqrt[\frac{189}{r}]{64} \Longrightarrow q^{\frac{189}{r}} = 64$$

$$q^{\frac{189}{252} \cdot r} = q^{\frac{3}{4}q} = 64 \Longrightarrow q^q = 64^{4/3} = 4^4 \Longrightarrow q = 4$$

$$r = \frac{252}{4} \Longleftrightarrow r = 63$$

RESPOSTA: ÷ 3.66.129.192

÷÷ 3:12:48:192

2a. QUESTÃO - ITEM 17

Valor 0,5

ENUNCIADO:

Pede-se determinar o têrmo da sucessão $2/5$, $8/14$, $18/29$, $32/50$, ..., a partir do qual, inclusive, a distância de qualquer têrmo ao número um é inferior a $11/32$;

SOLUÇÃO:

Numerador $2n^2$

Denominador

$$\left.\begin{array}{l} 5,\ 14,\ 29,\ 50,\ \ldots \\ 9,\ 15,\ 21,\ \ldots \\ 6,\ 6,\ \ldots \end{array}\right| \Rightarrow an^2 + bn + c \Longrightarrow \begin{cases} a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 14 \\ 9a + 3b + c = 29 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Longrightarrow u_n = \frac{2n^2}{3n^2 + 2}$$

Distância

$$\left| 1 - \frac{2n^2}{3n^2 + 2} \right| < \frac{11}{32} \Longleftrightarrow \frac{n^2 + 2}{3n^2 + 2} < \frac{11}{32} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 32n^2 + 64 < 33n^2 + 22 \Longleftrightarrow n^2 > 42$$

$$\Longleftrightarrow n \geqslant 7$$

RESPOSTA: $98/149$

2a. QUESTÃO - ITEM 18

Valor 0,5

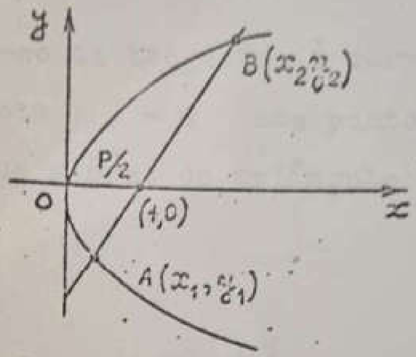
ENUNCIADO:

Seja a parábola $y^2 = 4x$. Uma reta de coeficiente angular positivo contém o foco e intercepta a curva nos pontos A e B. Deter mine as coordenadas de A ou de B, sabendo que o eixo OX divide o segmento AB em partes proporcionais a 3 e 1.

SOLUÇÃO:

$$y^2 = 2px \Longrightarrow p = 2$$

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1-k} \; ; \; y = \frac{y_1 - ky_2}{1-k}$$



$$x = 1 \; ; \; y = 0 \; ; \; k = -1/3$$

$$\therefore$$

$$x_1 = 4/3 - x^2/3$$

$$y_1 = y^2/3$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1^2 = 4x_1^2 \\ y_2^2 = 4x_2^2 \end{array}\right| \Longrightarrow \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{9} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x_2 = 9x_1 \\ x_1 = 4/3 - 9x_1/3 \Longrightarrow x_1 = 1/3 \end{array}\right.$$

$$x_2 = 9/3 = 3$$

$$y_2 = \pm 2\sqrt{x_2} \Longrightarrow y_2 = +2\sqrt{3}$$

$$y_1 = \pm 2\sqrt{x_1} \Longrightarrow y_1 = -2/\sqrt{3}$$

RESPOSTA:

$A\ (1/3\ ;\ -2\sqrt{3}/3)$

$B\ (3\ ;\ 2\sqrt{3})$

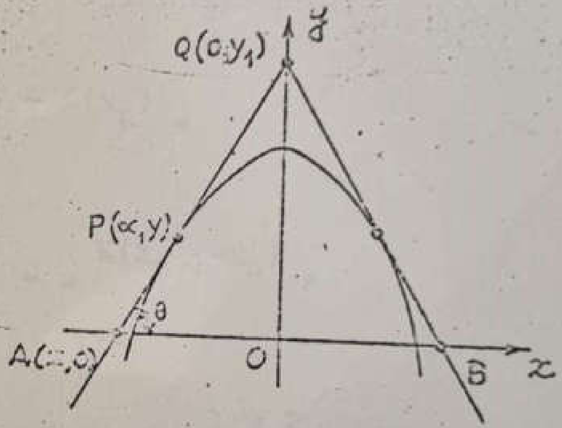
3a. QUESTÃO - ITEM 19

Valor 0,7

ENUNCIADO:

De um ponto $Q(0,y_1)$ traçam-se as tangentes à curva de equação $y = 2 - x^2$, que interceptam a reta $y = 0$ nos pontos A e B. Pode-se determinar y_1 de modo que a área do triângulo QAB seja mínima.

SOLUÇÃO:



$S = 2 . 1/2\ Z .\ y_1 = Z .\ y_1$

$tg\ \theta = -2x$

$-2x = \dfrac{2-x^2}{-Z+x} \Longrightarrow Z = \dfrac{x^2+2}{2x}$

$-2x = \dfrac{y_1-(2-x^2)}{-x} \Longrightarrow y_1 = x^2+2$

$S(x) = \dfrac{(x^2+2)^2}{2x}$

$\dfrac{dS(x)}{dx} = \dfrac{2x.4x(x^2+2)-2(x^2+2)^2}{4x^2}$

$\dfrac{dS(x)}{dx} = 0 \iff 8x^2 = 2(x^2+2)$

$\iff x^2 = 2/3 \Longrightarrow y_1 = 2/3 + 2$

RESPOSTA: 8/3

3a. QUESTÃO - ITEM 20

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Sabe-se que os números x_1, x_2, ..., x_n formam uma progressão aritmética de razão r; e que $g(x_1)$, $g(x_2)$, ..., $g(x_n)$ formam uma progressão geométrica de razão 2.

Sendo

$$g(x) = a^{f(x)}, \quad a > 1.$$

e

$$f(x) = Kx + b, \quad K \neq 0;$$ calcule r para $a = 10$, e $K = \log 2$.

SOLUÇÃO:

$$q = \frac{g(x_{n+1})}{g(x_n)} = a^{f(x_{n+1}) - f(x_n)} =$$

$$= a^{(Kx_{n+1}+b) - (Kx_n+b)} = a^{K(x_{n+1}-x_n)} =$$

$$= a^{Kr} = 2$$

$$Kr.\ \log a = \log 2 \iff r = \frac{\log 2}{K.\log a}$$

RESPOSTA: 1

3a. QUESTÃO - ITEM 21

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Resolva o sistema

$$\begin{cases} C_{x+y}^{x} = \log_y x \geq 0 \\ \log_y Z = \log_x Z + 4 \\ C_{x+y}^{y} = \log_x Z + \log_y Z \end{cases}$$

Observação:

C^p_n - combinação de n elementos p a p

$\log_c B$ - logarítmo de B na base c.

SOLUÇÃO:

$$C^p_n = C^{n-p}_n \Longrightarrow C^r_{r+y} = C^y_{r+y}$$

$$\log_z z = 1$$

$$\log_x z = \frac{\log_y z}{\log_y x}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \log_y x = \log_x z + 1 \\ \log_y z = \log_x z \cdot \log_y x \\ \log_y z = \log_x z + 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \log_y x \\ b = \log_x z \\ c = \log_y z \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ c = b \cdot a \\ c = b+4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b \cdot a = b+4 \\ a = b+1 \\ c = b+4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 = \log_x z \\ b = 2 = \log_y x \\ c = 6 = \log_y z \end{cases}$$

$$C^r_{r+y} = C^y_{r+y} = 3$$

$$C^r_{2+1} = C^2_{2+1} = 3 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} y = 2 \ \underline{\text{ou}} \ y = 1 \\ r = 2 \ \underline{\text{ou}} \ r = 1 \end{array}\right.$$

$$\log_y x = 3 \Longrightarrow y = 2 \; ; \; x = 8 \; ; \; r = 1 .$$

$$\log_8 z = 2 \Longleftrightarrow z = 8^2 = 64$$

Obs.: $b = -2 \Longrightarrow a = -1$.

RESPOSTA:

$x = 8$
$y = 2$
$z = 64$

3a. QUESTÃO - ITEM 22

Valor 0,7

ENUNCIADO:

Seja a função F definida por

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \leq 1 \\ |3x - 5|, & x > 1. \end{cases}$$

Sabe-se que :

i) a função F é contínua sôbre seu conjunto de definição;

ii) $\int_0^1 F(x) \cdot dx = 1,5$;

iii) a função primeira derivada de F é descontínua apenas em um número do conjunto dos reais.

Pede-se determinar os números a , b , c .

SOLUÇÃO:

$$|3x - 5| = \begin{cases} 3x - 5 & \text{se } 3x - 5 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 5/3 \\ -3x + 5 & \text{se } 3x - 5 < 0 \Longleftrightarrow x < 5/3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (i) \Longrightarrow a + b + c = 2 \\ (ii) \Longrightarrow a/3 + b/2 + c = 1,5 \Rightarrow \\ (iii) \Longrightarrow 2a + b = -3 \end{array} \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 2a + 3b + 6c = 9 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \\ c = -1 \end{cases}$$

RESPOSTA: $a = -6$

$b = 9$

$c = -1$.