1a. QUESTÃO: PROVA DE ÁLGEBRA 66

1) A soma de 3 números que formam uma progressão aritmética crescente é 36. Determine êsses números, sabendo que se somarmos 6 unidades ao último, êles passam a constituir uma progressão geométrica.

SOLUÇÃO:

Seja $A = \left\{ a_1, a_2, a_3 \right\}$. Então:

$\div a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ e $\dfrac{3(a_1+a_3)}{2} = 36$ ... (1)

$\div\div a_1 : a_2 : (a_3+6) \longrightarrow a_2^2 = a_1(a_3+6)$ ... (2)

De (1) e (2) tem-se: $\begin{cases} a_2 = 12 & \text{... (3)} \\ 144 = (24-a_3)(a_3+6) & \text{... (4)} \end{cases}$

Logo:

$a_3 \in \left\{ 0, 18 \right\}$ ... (5)

Do enunciado:

$a_3 = 18$ ... (6)

Logo:

$A = \left\{ 6, 12, 18 \right\}$ Resp.

2) Resolva a equação:

$$10^{2x-1} - 11(10)^{x-1} + 1 = 0$$

SOLUÇÃO:

Seja $10^x = y$ ... (1)

Então:

$10^{2x} - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$, logo:

$y^2 - 11y + 10 = 0$ ... (2)

Tem-se:

$y = 10$ ou $y = 1$ ... (3)

De (3) e (1) vem:

$x = 1$ ou $x = 0$ Resp.

3) Resolva a equação : $x^5 = 16(\sqrt{3} + i)$, apresentando o resultado sob forma polar.

SOLUÇÃO:

Tem-se : $x^5 = 32 \,\underline{/\, 2K\pi + tg^{-1}\, 1/\sqrt{3}}$,

Logo: $x = 2 \,\underline{/\, \frac{2K\pi}{5} + \frac{\pi}{30}}$, $K \in \{0,1,2,3,4\}$

Então:

$K = 0 \longrightarrow x = 2 \,\underline{/\, \pi/30} = 2 \,\underline{/\, 6^\circ}$

$K = 1 \longrightarrow x = 2 \,\underline{/\, 78^\circ}$

$K = 2 \longrightarrow x = 2 \,\underline{/\, 150^\circ}$

$K = 3 \longrightarrow x = 2 \,\underline{/\, 222^\circ}$

$K = 4 \longrightarrow x = 2 \,\underline{/\, 294^\circ}$

4) Resolva a equação:

$$\left[x^{6\, lg_2 \sqrt[3]{2}}\right] - lg_x\,(1/x) + lg_{10}\, 0{,}001 = \frac{lg_e\, y^{2x}}{lg_e\, y}$$

SOLUÇÃO:

Tem-se:

$$\left[x^{6\, lg_2 (2^{1/3})}\right] - lg_x\,[x]^{-1} = \left[x^{6/3}\right]^{1} = x^2$$

Então:

$$x^2 - 3 = \frac{2x\, lg_e y}{lg_e y}$$

Admitindo-se $y > 0$ e $y \neq 1$, vem:

$$x^2 - 3 = 2x \quad \therefore \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x \in \{3, -1\}$$ e, portanto:

$$\boxed{x = 3}$$ Resp..

5) Determinar os valores de $\underline{a}$ que tornam o sistema abaixo incompatível:

$$\begin{cases} x + a\,(y + z) = 0 \\ y + a\,(x + z) = 0 \\ z + a\,(x + y) = 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

O Sistema considerado é compatível, qualquer que seja o valor de a, pois:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^2\,(2a + 1)$$ e:

i) $a \notin \{1, -1/2\} \longrightarrow$ sistema possível, determinado, admitindo solução trivial:

$$x = y = z = 0$$

ii) $a \in \{1, -1/2\} \longrightarrow \Delta = 0$, sistema indeterminado.

Resp.: O conjunto formado pelos valores de a que tornam o sistema dado incompatível é VAZIO.

6) Determine

$P_1(x)$ e $P_2(x)$ na expressão abaixo, sabendo que $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ são binômios:

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

SOLUÇÃO:

Tem-se: $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$ ... (1)

De (1):

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \ldots (2)$$

Então: $1 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x - 2)$ ... (3)

Em(3):

$x = 0 \longrightarrow A - 2C = 1$ ... (4)

$x = 1 \longrightarrow 2A - B - C = 1$ ... (5)

$x = 2 \longrightarrow A = 1/5$ ... (6)

De (4), (5) e (6), tem-se:

$A = 1/5, \quad B = 1, \quad C = -2/5,$ logo:

$P_1(x) = 1/5, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2$

$\therefore P_2(x) = x - 2/5, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2$ Resp.

7) Determine o valor numérico do determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lg 7 & \lg 70 & \lg 700 & \lg 7000 \\ (\lg 7)^2 & (\lg 70)^2 & (\lg 700)^2 & (\lg 7000)^2 \\ (\lg 7)^3 & (\lg 70)^3 & (\lg 700)^3 & (\lg 7000)^3 \end{vmatrix}$$

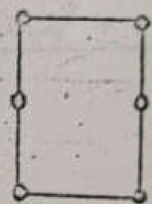
Obs.: " lg A " significa: "logarítmo decimal de A".

SOLUÇÃO: Trata-se de um determinante de Vandermonde:

$$\Delta = (\lg 70 - \lg 7)(\lg 700 - \lg 70)(\lg 700 - \lg 7)(\lg 7000 - \lg 7) \cdot$$
$$\cdot (\lg 7000 - \lg 70) \cdot (\lg 7000 - \lg 700) =$$
$$= \lg 10 \times \lg 10 \times \lg 10^2 \times \lg 10^3 \times \lg 10^2 \cdot \lg 10 = \underline{12}$$ ... <u>Resp.</u>

8) Determinada organização estabeleceu um sistema de código em que os símbolos são formados por um ou mais pontos, até o máximo de 6 pontos, dispostos de maneira a ocuparem os vértices e os pontos médios dos lados maiores de um retângulo. Qual o número total de símbolos obtidos?

<u>SOLUÇÃO:</u>



$$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 =$$

$$= 6 + \frac{6 \times 5}{2!} + \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} + \frac{6 \times 5}{2!} + 6 + 1 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

<u>Resp.</u>

9) Dada a equação $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, determine, sem resolvê-la, a soma dos quadrados de suas raízes.

<u>SOLUÇÃO:</u>

Seja $M = \{ x \mid x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \} = \{ x_1, x_2, x_3 \}$

Então:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -A \qquad \dots (1)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = B \qquad \dots (2)$$

De (1) e (2), tem-se:

$$A^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2B \qquad \dots (3)$$

Logo:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = A^2 - 2B$$ ... <u>Resp.</u>

10) Dadas as equações:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$
$$A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1 = 0 \ ,$$

sabendo que duas raízes da primeira equação são também raízes da segunda e que $\dfrac{A_1}{A} = \dfrac{C_1}{C}$, determine as raízes comuns.

SOLUÇÃO:

Tem-se:

$$\begin{array}{l|l}
 & A/A_1 \\
\hline
Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1 \\
\hline
\dfrac{BA_1 - AB_1}{A_1}x^2 + \dfrac{CA_1 - C_1A}{A_1}x + \dfrac{DA_1 - D_1A}{A_1} &
\end{array}$$

As raízes comuns são as raízes de: $\dfrac{BA_1 - AB_1}{A_1}x^2 + \dfrac{CA_1 - C_1A}{A_1}x + \dfrac{DA_1 - D_1A}{A_1} = 0$

$$A_1 \neq 0 \rightarrow (BA_1 - B_1A)\,x^2 + (CA_1 - C_1A)\,x + (DA_1 - D_1A) = 0$$

Sendo : $\dfrac{A_1}{A} = \dfrac{C_1}{C}$, ou $C_1A = CA_1$; logo: $(BA_1 - B_1A)x^2 = D_1A - DA_1$.

$$x = \pm\sqrt{\dfrac{D_1A - DA_1}{BA_1 - B_1A}}$$

11) Calcule:

$$\lim_{x \to 0} (\cos mx)^{n/x^2}$$

SOLUÇÃO:

Tem-se que:

$$x \to 0 \Longrightarrow \cos mx \cong 1 - \frac{m^2x^2}{2} \quad , \text{ logo:}$$

$$\lim_{x\to 0} (\cos mx)^{n/x^2} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{m^2x^2}{2}\right)^{n/x^2} =$$

$$= e^{-m^2n/2}$$

Resp.

12) Dada a função $\sqrt[3]{y^x} = \lim \sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x \ldots}}}}$,

determine o valor numérico de $\frac{dy}{dx}$ no ponto $x = 1$.

SOLUÇÃO:

Tem-se:

$$y^{2x/3} = \lim y\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x \ldots}}}$$

$$y^{4x/3} = y^2 x \lim \sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x}}}} \ldots \text{ , logo:}$$

$$y^{4x/3} = y^2x . \sqrt[3]{y^x} \quad , \text{ ou}$$

$$y^2x = y^x \quad \therefore \quad y^{x-2} = x$$

Então:

$$(x-2)\ln y = \ln x \quad \therefore \quad \ln y = \frac{\ln x}{x-2} \quad \therefore$$

$$y = e^{\frac{\ln x}{x-2}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = y\,\frac{(x-2)1/x - \ln x}{(x-2)^2} \quad \therefore$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -1$$

Resp.

13) Calcule a soma da série:

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots$$

SOLUÇÃO: Têrmo geral : $A_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

Tem-se: $A_n = \dfrac{A}{2n-1} + \dfrac{B}{2n+1} + \dfrac{C}{2n+3} = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

Então: $A = \dfrac{1}{8}$; $B = -\dfrac{1}{4}$; $C = \dfrac{1}{8}$

Lógo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} An = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots\right) +$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} .$$

Resp.: 1/12

14) Calcule a soma da série:

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

SOLUÇÃO:

Seja S a soma procurada. Então:

$Sx = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + nx^n$ ... (1)

$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$ ... (2)

De (1) e (2), tem-se:

$$Sx - S = nx^n - (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}) = nx^n - \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

ou:

$$S = \frac{nx^n}{x-1} - \frac{x^n - 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

Resp.: $\boxed{S = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}}$

15) - Calcule $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, sabendo que $p+1>$ ...

Solução:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 1/n \left[(1/n)^p + (2/n)^p + (3/n)^p + \ldots + (n/n)^p \right] =$$

$$= \int_0^1 x^p \, dx = 1/p+1$$

Resp.: $1/p+1$

16) - Determine o valor numérico da área delimitada pelas curvas

$x + 2y = 3$ e $x = y^2 - 3y + 1$

Solução:

Sejam : $M = \{ (x,y) \mid x + 2y = 3 \}$ e

$C = \{ (x,y) \mid x = y^2 - 3y + 1 \}$. Então:

$M \cap C = \{ (-1,2) , (5,-1) \}$ e :

$$A = \int_{-1}^{2} \left[(3-2y) - (y^2 - 3y + 1) \right] dy = \int_{-1}^{2} (-y^2+y+2) \, dy =$$

$= 9/2 = 4,5$ unidades de área.

Resp.: 4,5 unidades de área.

2a. QUESTÃO

Enunciado:

1) A função abaixo é definida para $x > 1$. Sabendo que a é um número real, determine a condição para que a mesma não possua máximo nem mínimo.

$$y = \frac{x^2 - 3ax + 2a}{2ax^2 - 3ax + a}$$

Solução:

Do enunciado, tem-se:

$$x > 1 \quad e \quad a \neq 0 \qquad \ldots (1)$$

Sendo: $$y' = \frac{(2ax^2-3ax+a)(2x-3a)-(x^2-3ax+2a)(4ax-3a)}{(2ax^2 - 3ax + a)^2}$$

ou:

$$y' = \frac{(6a^2-3a)x^2+(2a-8a^2)x+3a^2}{(2ax^2 - 3ax + a)^2} \qquad \ldots (2)$$

Deve-se ter: $y' \neq 0$, ou seja, em (2):

$$(2a - 8a^2)^2 - 12a^2(6a^2 - 3a) < 0 \quad \therefore$$

$$2a^2 - a - 1 > 0 \quad , \text{ logo:}$$

$$a < -1/2 \quad ou \quad a > 1$$

Resp.:

$$a \in (-\infty \, ; \, -1/2) \cup (1 \, ; \, +\infty)$$

2a. QUESTÃO

Enunciado:

2) Dada a equação $x^4 + 4x^3 - 4cx + 4d = 0$, sabendo que a mesma possui uma raiz dupla da forma $(a + b\sqrt{3})$ e que c e d são números racionais, determine a, b, c e d.

Solução:

Sendo todos os coeficientes racionais, a existência de uma raiz dupla da forma $(a + b\sqrt{3})$, impõe:

$$x^4 + 4x^3 - 4cx + 4d = \left[x - (a + b\sqrt{3})\right]^2 \left[x - (a - b\sqrt{3})\right]^2 = c$$

Logo, extraindo a raiz quadrada, tem-se:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{x^4 + 4x^3 - 4cx + 4d} & x^2 + 2x - 2 \\
\hline
-x^4 & (2x^2 + 2x)\,2x = 4x^3 + 4x^2 \\
\quad 4x^3 & (2x^2 + 4x - 2)\,(-2) = -4x^2 - 8x + 4 \\
\quad -4x^3 - 4x^2 & \\
\qquad -4x^2 - 4cx + 4d & \\
\qquad +4x^2 + 8x - 4 & \\
\qquad (8-4c)x - (4d-4) &
\end{array}$$

onde: $(8 - 4c)\,x - (4d - 4) \equiv 0 \quad \therefore \quad c = 2$ e $d = 1$

e, portanto, as raízes são obtidas de:

$$(x^2 + 2x - 2) = 0 \quad \therefore \quad x_1 = -1 + \sqrt{3} \quad \text{e} \quad x_2 = -1 - \sqrt{3},$$

logo: $a = -1$, $b = +1$ ou $b = -1$

Resp.: $a=-1$; $c=2$; $d=1$; $b \in \{-1, 1\}$

2a. QUESTÃO - ITEM 3

ENUNCIADO:

Determine os valores de x e de y, em função de n, na equação:

$$C_n^0 \cdot C_n^2 + C_n^1 C_n^3 + C_n^2 C_n^4 + \dots + C_n^{n-2} \cdot C_n^n = C_x^y$$

SOLUÇÃO:

$$C_n^0 C_n^2 + C_n^1 C_n^3 + C_n^2 C_n^4 + \dots + C_n^{n-2} C_n^n =$$

$$= C_n^0 C_n^{n-2} + C_n^1 C_n^{n-3} + C_n^2 C_n^{n-4} + \dots + C_n^{n-2} C_n^0 =$$

$$= C_{2n}^{n-2} = C_x^y$$

Logo: $2n = x$, $\therefore y = n + 2$ ou $y = n - 2$

RESPOSTA:

$$\begin{cases} x = 2n \\ y = n+2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2n \\ y = n-2 \end{cases}$$

3a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

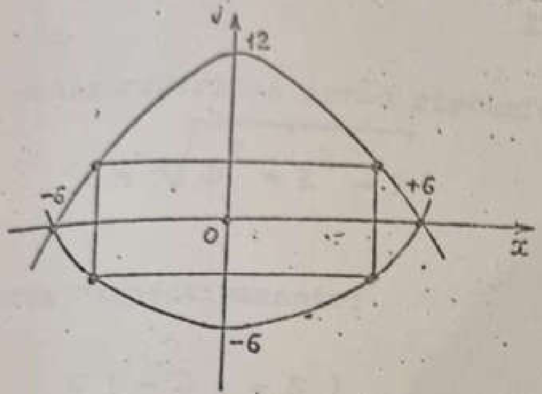
1) Qual o valor numérico da área do maior retângulo, de lados paralelos aos eixos cartesianos ortogonais, que se pode construir na região limitada pelas duas curvas:

$$\begin{cases} x^2 + 3y - 36 = 0 \\ x^2 - 6y - 36 = 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

- parábola : $x^2 + 3y - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 6 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases}$

- parábola : $x^2 - 6y - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 6 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$



Tem-se : $S = 2x\,(y_1 - y_2)$, onde:

$y_1 = \dfrac{36-x^2}{3}$ e $y_2 = \dfrac{x^2-36}{6}$,

Logo:

$$S = 2x\left[\left(\frac{36-x^2}{3}\right) - \left(\frac{x^2-36}{6}\right)\right] = 36x - x^3 \quad , \quad e:$$

$$\frac{dS}{dx} = 36 - 3x^2 = 0 \quad \therefore \quad x^2 = 12 \longrightarrow x = \pm 2\sqrt{3} \,.$$

Portanto: $S_{max} = 36 \times 2\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = \boxed{48\sqrt{3}}$

RESPOSTA: $48\sqrt{3}$

3a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

2) Determine a condição para que sejam tangentes as curvas definidas pelas equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ x^2 + y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

Admitindo-se : $D^2 + E^2 - F > 0$

$D_1^2 + E_1^2 - F_1^2 > 0$ e ,

as curvas referidas serão circunferências de raios:

$r = \sqrt{D^2 + E^2 - F}$ e $r_1 = \sqrt{D_1^2 + E_1^2 - F_1}$, com

centros respectivamente:

$O(-D, -E)$ e $O_1(-D_1, -E_1)$.

Sendo a distância $\overline{OO_1} = d = \sqrt{(D - D_1)^2 + (E - E_1)^2}$, tem-se, para que sejam tangentes:

$d = r + r_1$ (exteriores) (1) ou

$d = r - r_1$, se $r > r_1$ ... (2)

(tangentes interiores)

De (1) e (2) , finalmente:

RESPOSTA:

$$\sqrt{(D - D_1)^2 + (E - E_1)^2} = \sqrt{D^2 + E^2 - F} + \sqrt{D_1^2 + E_1^2 - F_1} \text{ , ou}$$

$$\sqrt{(D - D_1)^2 + (E - E_1)^2} = \sqrt{D^2 + E^2 - F} - \sqrt{D_1^2 + E_1^2 - F_1}$$

Resp.

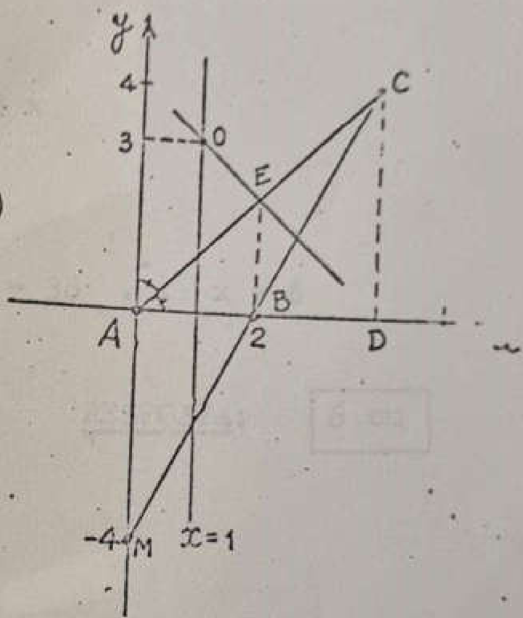
3a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

3) Num sistema de eixos cartesianos ortogonais o vértice A do triângulo ABC está na origem e o eixo dos X é o suporte do lado AB. O coeficiente angular do lado AC é 1. Sabendo que os pontos B, C e M, êste último de coordenadas (0 ; − 4), estão em linha reta e que as distâncias BC e BM são iguais, determine a equação da circunferência circunscrita ao referido triângulo.

SOLUÇÃO:

Tem-se:



- $\Delta ABM \triangleq \Delta BDC$ ... (1)

- De (1) : $\overline{CD} = 4$ e $\overline{AB} = 2$ ... (2)

Mediatriz de $\overline{AB}$: $x = 1$ ... (3)

Ponto médio de $\overline{AC}$: $E(2,2)$ ... (4)

Mediatriz de $\overline{AC}$:

$$\frac{y-2}{x-2} = -1$$

ou $y = 4 - x$ ... (5)

- centro da circunferência circunscrita ao triângulo:

$$\{(x, y) \mid x = 1\} \cap \{(x, y) \mid y = 4 - x\} = \{(1,3)\} \quad \text{... (6)}$$

- raio da circunferência : $r = \sqrt{10}$ ... (7)

De (6) e (7), segue-se :

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10 \quad \text{ou}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$$

RESPOSTA: $x^2+y^2-2x-6y = 0$