1ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

Dada a função $f(x) = \dfrac{(156^{x} + 156^{-x})}{2}$, demonstre que:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\, f(x)\, f(y)$$

2ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:

- a senha utilizada possui 4 dígitos;
- o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
- o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Teclado numérico

3ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

ANULADA

Sejam a, b, c e d números reais positivos e diferentes de 1. Sabendo que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, demonstre que:

$$c^2 = (a\,c)^{\log_a d}$$

4ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

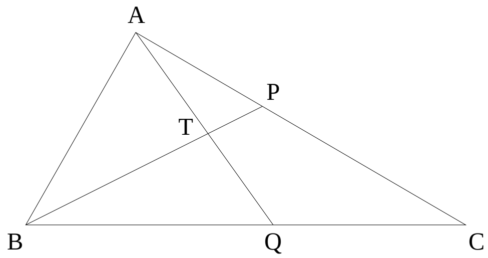
Determine o valor das raízes comuns das equações $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = 0$ e $x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 = 0$.

5ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

Resolva a equação $2\,\mathrm{sen}\,11x + \cos 3x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,3x = 0$.

6ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Considere um triângulo ABC de área S. Marca-se o ponto P sobre o lado AC tal que $\overline{\mathrm{PA}}/\overline{\mathrm{PC}} = q$, e o ponto Q sobre o lado BC de maneira que $\overline{\mathrm{QB}}/\overline{\mathrm{QC}} = r$. As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura. Determine a área do triângulo ATP em função de S, q e r.



7ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Considere uma elipse de focos F e F', e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes $\overline{\mathrm{MF}}$ e $\overline{\mathrm{MF'}}$, que interceptam a elipse em P e P', respectivamente. Demonstre que a soma $(\overline{\mathrm{MF}}/\overline{\mathrm{FP}}) + (\overline{\mathrm{MF'}}/\overline{\mathrm{F'P'}})$ é constante.

Sugestão: calcule inicialmente a soma $(1/\overline{\mathrm{MF}}) + (1/\overline{\mathrm{FP}})$.

8ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Sejam a, b e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, onde r e t são números reais não nulos.

a. Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de r e t.

b. Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, onde $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualquer número natural k.

9ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Calcule o determinante da matriz n x n em função de b, onde b é um número real tal que $b^2 \neq 1$.

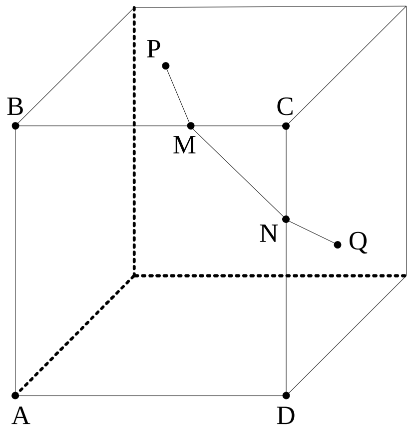
$$\underbrace{\left.\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}\right\} n \text{ linhas}}_{n \text{ colunas}}$$

10ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Considere os pontos P e Q sobre faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta $\overline{BC}$ em M e a aresta $\overline{CD}$ em N, conforme ilustrado na figura abaixo. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.

a. Demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

b. Calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função de $\overline{BC} = a$ e $\overline{BM} = b$.



RASCUNHO

RASCUNHO

01) $2f(x)f(y) = 2\left(\dfrac{156^{x} + 156^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{156^{y} + 156^{-y}}{2}\right) = \dfrac{156^{x+y} + 156^{-x-y} + 156^{x-y} + 156^{-x+y}}{2}$

$= \left(\dfrac{156^{x+y} + 156^{-(x+y)}}{2}\right) + \left(\dfrac{156^{x-y} + 156^{-(x-y)}}{2}\right) = f(x+y) + f(x-y).$

02) O ladrão deve experimentar 171 senhas para ter certeza de entrar na casa.

03) $c^2 = (a.c)^{\log_a b}$

Assim, notamos que houve um engano na referida questão, pois o expoente do termo $(a.c)$ deve ser $\log_a b$, e não $\log_a d$, como diz o enunciado.

04) As raízes de $p_1(x)$ são: $x_1 = -3$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1 - \sqrt{3}$; $x_4 = 1 + \sqrt{3}$

Verificando as raízes comuns a $p_1(x)$ e $p_2(x)$, caso realmente ela(s) exista(m), pelo método Briot-Ruffini:

Portanto, não existem raízes comuns entre $p_1(x)$ e $p_2(x)$.

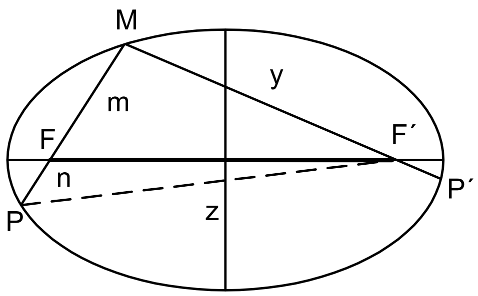
05) $x = \dfrac{7\pi}{48} + k.\dfrac{\pi}{4}$

$$S = \left\{ x \in R \,\middle|\, x = \frac{11\pi}{84} + k.\frac{\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{48} + k.\frac{\pi}{4}, k \in Z \right\}$$

06)

$$\boxed{S_{ATP} = \frac{q^2.S}{(q+1).(q.r+q+r)}}$$

07) Sejam: eixo maior da elipse = 2a, eixo menor da elipse = 2b, distância focal = 2c, MP= x = m + n, MF = m, FP = n, FF' = d = 2c, MF' = y, PF' = z.



MF + MF´= PF + PF´ = 2a

$\Leftrightarrow$ m + y = n + z = 2a = k (uma constante)

$\Rightarrow$ 1/m + 1/n = $\left(\frac{1}{MF}\right) + \left(\frac{1}{FP}\right)$ = 4k/(k^2 – d^2) = K que é constante pois k e d são constantes.

$\Leftrightarrow$ PF/FM+ F'M/P'F' = K.k – 2 (que é constante) c.q.d.

Observação: $K.k - 2 = \dfrac{4.k^2}{k^2 - d^2} - 2 = \dfrac{4.(2a)^2}{((2a)^2 - (2c)^2)} - 2 = \dfrac{4a^2 - 2a^2 + 2c^2}{b^2} = \dfrac{2a^2 + 2c^2}{b^2}$

08) a) $a+b+c=0$.

Logo $a^3+b^3+c^3=3t$.

b) Seja d uma raiz qualquer de $p(x)$. Multiplicando a igualdade $d^3+rd-t=0$ por d^{n-2}, obtemos $d^{n+1}+rd^{n-1}-td^{n-2}=0$.

Assim, são válidas as três igualdades:

$$\begin{cases} a^{n+1}+ra^{n-1}-ta^{n-2}=0 \\ b^{n+1}+rb^{n-1}-tb^{n-2}=0 \\ c^{n+1}+rc^{n-1}-tc^{n-2}=0 \end{cases}$$

Somando as três equações, obtemos: $\left(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}\right)+r\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)-t\left(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2}\right)=0$, ou seja $S^{n+1}+rS^{n-1}-tS^{n-2}=0$, para todo natural $n\geq 2$. c.q.d.

09) 1ª solução: Seja Δ_n o determinante procurado.

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace na primeira colunas temos:

$$\Delta_n=(b^2+1).(-1)^{1+1}.\underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{n-1\text{ colunas}}$$

$$+\quad b.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace na primeira linha do determinante na segunda parcela, temos:

$\Delta_n = (b^2+1).\Delta_{n-1}$

$$-\ b.b.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{vmatrix}$$

$\Delta_n=(b^2+1).\Delta_{n-1}-b^2.\Delta_{n-2}$

$\Delta_n - \Delta_{n-1} = b^2.(\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2})$; usando a relação para outros valores: $\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} = b^2.(\Delta_{n-2}-\Delta_{n-3})$

....

$\Delta_3 - \Delta_2 = b^2.(\Delta_2 - \Delta_1)$

$\Delta_2 - \Delta_1 = \begin{vmatrix} b^2+1 & b \\ b & b^2+1 \end{vmatrix} - \left|b^2+1\right| = b^4$

Ou seja as diferenças estão em PG de razão b^2

O primeiro termo é b^4; ao todo são n-1 termos.

Pela soma dos termos da PG

$\Delta_n - \Delta_1 = \dfrac{\left(b^4\right)\left(\left(b^2\right)^{n-1} - 1\right)}{b^2 - 1}$

E $\Delta_n = \dfrac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}$

2ª solução:

Seja D_n o determinante pedido. Aplicando Laplace na primeira coluna temos:

$D_n = \left(b^2+1\right).D_{n-1} + b\ .\ (-1)^{2+1}\ .\ \Delta = \left(b^2+1\right).\ D_{n-1} - b\ .\ \Delta,$

onde $\Delta = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & b \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}_{n-1}$

Resolvemos Δ utilizando Laplace na primeira linha. Assim $\Delta = b.D_{n-2}$. Portanto $D_n = \left(b^2+1\right).$ $D_{n-1} - b^2.\ D_{n-2}$. Esta é uma equação recorrente linear de 2ª ordem cuja equação característica é $\lambda^2 = \left(b^2+1\right).\ \lambda - b^2 \Leftrightarrow \lambda^2 - (b^2+1)\ .\ \lambda + b^2 = 0,$ com raízes b^2 e 1, e como $b^2 \neq 1$ temos que $D_n = \alpha.\left(b^2\right)^n + \beta = \alpha.b^{2n} + \beta$ (*).

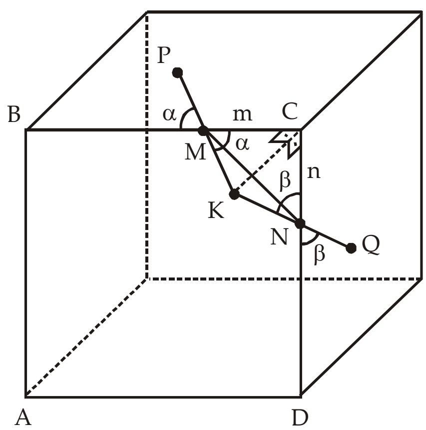
Sabendo que $D_1 = b^2+1$ e $D_2 = \left(b^2+1\right)^2 - b^2 = b^4 + b^2 + 1$ e substituindo em (*)

Temos: $\begin{cases} b^2+1 = b^2.\alpha + \beta \\ b^4 + b^2 + 1 = b^4.\alpha + \beta \end{cases}$, resolvendo o sistema obtemos $\alpha = \dfrac{b^2}{b^2-1}$ e $\beta = \dfrac{1}{1-b^2}$, p/ $b \neq 0$.

e portanto $D_n = \dfrac{b^{2n+2}}{b^2-1} + \dfrac{1}{1-b^2} = \dfrac{b^{2n+2}-1}{b^2-1}$

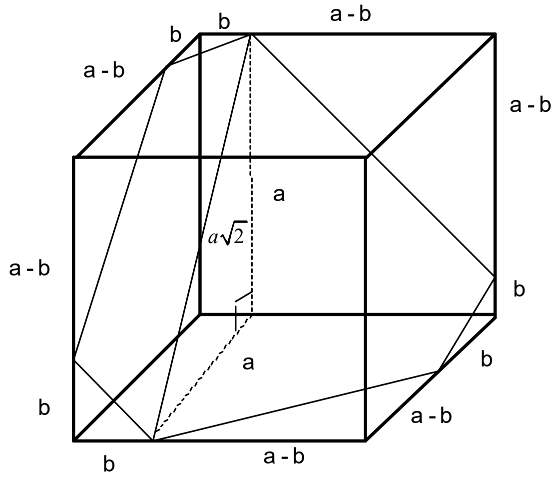
Para o caso em que b = 0 temos D_n = 1, pois obtemos a matriz identidade.

10) a) somente existirá solução para ângulo de 45º.



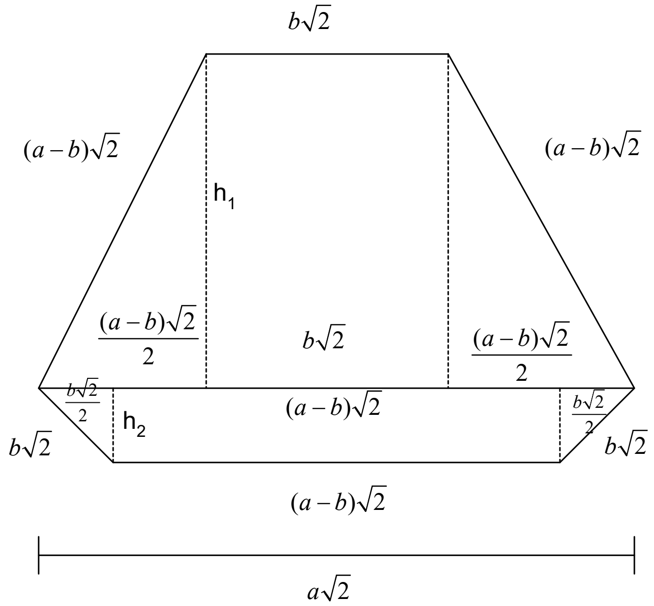
Sendo α = 45º, m = n e o triângulo CMN é retângulo isósceles, e MN paralelo a BD, sendo AC perpendicular a MN. c.q.d. (para α = 45º).

b) Vamos visualizar o corte visto do lado oposto, chamemos m e n de b, assim a figura fica:



E o plano que passa pelos 4 pontos: P, M, N e Q corta o cubo em um hexágono equiângulo com todos os ângulos sendo 120º, pois os lados deste hexágono são paralelos às diagonais das faces do cubo.

Para calcular a área, façamos o corte como segue:



Então: S $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + 2ab - 2b^2)$

Cortesia: Resoluções Alferes Vestibulares