PROVA DE MATEMÁTICA

CADERNO DE QUESTÕES

CONCURSO DE ADMISSÃO
AO
PRIMEIRO ANO
DO
CURSO DE FORMAÇÃO E GRADUAÇÃO

1992 - 1993

COMISSÃO DE EXAME DE ESCOLARIDADE

1992 - 1993

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA

1. Não assine ou faça qualquer sinal em sua prova que possa identificá-la. A inobservância disto poderá anulá-la.

2. Utilize caneta azul para resolução das questões. As figuras julgadas necessárias deverão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores.

3. A interpretação faz parte das questões; por conseguinte são vedadas perguntas ao Grupo de Aplicação e Fiscalização.

4. O espaço destinado à solução de cada questão é suficiente, não sendo considerada resolução fora do local especificamente designado.

5. Você recebeu 2(dois) Cadernos : o de Questões e o de Soluções.

6. Neste Caderno constam as 10(dez) questões que constituem a Prova, cada uma no valor de 1,0(um) ponto.

7. O de Soluções é constituído por 39(trinta e nove) páginas, das quais 30(trinta) destinam-se às resoluções e 9(nove) aos rascunhos. Observe que o rascunho não será levado em conta para efeito de correção.

8. O tempo total para execução da prova é limitado a 4 (quatro) horas.

9. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Observe o local correto para a resolução de cada questão. Escreva com caligrafia legível.

10. Não é permitido destacar quaisquer das folhas que compõem os os cadernos.

11. Ao entregar a prova devolva todo o material recebido. O Caderno de Questões estará liberado após o término da Prova.

12. Lembre-se : Não deixe questão alguma em branco. Se porventura não conseguir resolver integralmente uma questão, procure mostrar conhecimento sobre o assunto, deixando indicado o encaminhamento da solução. Com isto você certamente obterá uma fração do grau atribuído à questão.

Estamos aguardando-o como nosso aluno no início do período letivo e lhe desejamos FELICIDADE nesta prova.

1ª Questão: Valor: 1,0

Considere a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são inteiros positivos. Sabendo-se que uma das raízes dessa função é igual a 2i, calcular os menores valores de a, b e c para que exista um ponto de máximo e um ponto de mínimo reais.

2ª Questão: Valor: 1,0

Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos.

Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro comum.

Todos os alunos participam.

a) Quantos alunos tem a escola?

b) Quantos alunos participam de cada comissão?

3ª Questão: Valor: 1,0

Prove, por indução, que:

$(a + b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}\, b + \ldots + C_n^n\, b^n$ para $n \in N$

4ª Questão: Valor: 1,0

Indique se é verdadeiro (V) ou falso (F) o que se segue e justifique sua resposta.

4ª Questão:

(Continuação)

a) O conjunto dos números reais não têm pontos extremos reais;

b) Existe um número em $\mathbb{Q}$ (racionais) cujo quadrado é 2;

c) O ponto correspondente a $\frac{66}{77}$ na escala dos números reais $\mathbb{R}$ está situado entre os pontos $\frac{55}{66}$ e $\frac{77}{88}$.

5ª Questão:

Valor: 1,0

Determine o valor de x para que:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 & 6 \\ x & x+2 & 0 & 10 \\ x^2 & 0 & 4x & 4 \\ x & 4 & 10 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

6ª Questão:

Valor: 1,0

Faça o que se pede:

a) Calcule o argumento do seguinte número complexo $i(1+i)$;

b) Escreva sob forma trigonométrica o número complexo $Z = 1 + i\sqrt{3}$.

7ª Questão:

Valor: 1,0

Considere uma função $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

1. L é crescente, isto é, para quaisquer $0 < x < y$ tem-se $L(x) < L(y)$;

7ª Questão: (Continuação)

2. $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y > 0$.

Mostre que:

a) $L(1) = 0$;

b) $L(1/x) = -L(x)$ para todo $x > 0$;

c) $L(x/y) = L(x) - L(y)$ para quaisquer $x, y > 0$;

d) $L(x^n) = nL(x)$ para todo $x > 0$ e natural n;

e) $L(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} L(x)$ para todo $x > 0$ e natural n;

f) $L(x) < 0 < L(y)$ sempre que $0 < x < 1 < y$.

8ª Questão: Valor: 1,0

Demonstrar analiticamente que se uma reta perpendicular a uma corda de uma circunferência, passa pelo seu centro, então, ela divide a corda no seu ponto médio.

9ª Questão: Valor: 1,0

Provar que a soma das distâncias de um ponto qualquer interior a um triângulo equilátero aos lados é constante.

10ª Questão: Valor: 1,0

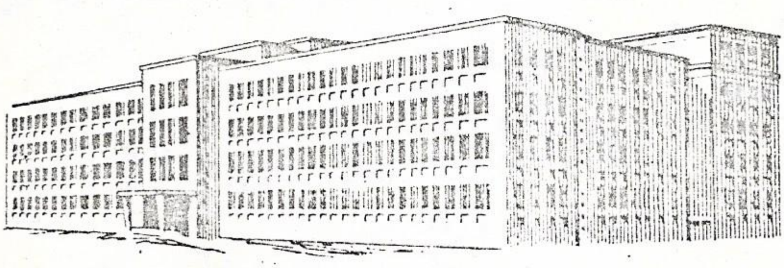
Resolva a equação

$$\text{sen } x - \cos x = \text{sen } 2x - \cos 2x - 1$$

1792 - 1992

Da
Real Academia
de
Artilharia, Fortificação e Desenho
ao
Instituto Militar de Engenharia

200 ANOS DE ENGENHARIA



O EXÉRCITO ENSINANDO REGULARMENTE ENGENHARIA,
CONSTRUINDO A GRANDEZA DO PAÍS

① $x_1=2i$; $x_2=-2i$; $x_3=-a$; $c=4a$; $f'(x)=3x^2+2ax+b$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$

$4+2ai-2ai=b$; $b=4$; $3x^2+2ax+4=0$; $4a^2-4(3)(4)>0$; $a^2>12$; $a_{min}=4$

$c_{min}=16$

② a) $C_{15,2}=15\cdot7=105$ b) $15m=105\cdot2 \to m=14$

③ $n=0 \to C_0^0 a^0=1=(a+b)^0$ ✓; $n=1 \to C_1^0 a^1+C_1^1 a^0 b=a+b=(a+b)^1$ ✓

$(a+b)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^j \to (a+b)^{k+1}=(a+b)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^j=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j+1}b^j+$

$+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^{j+1}=C_k^0a^{k+1}+C_k^1a^kb+C_k^2a^{k-1}b^2+\dots$ stifel

④ V; F; V $\frac{55}{66}=\frac{5}{6}=\frac{5\cdot7\cdot8}{6\cdot7\cdot8}$; $\frac{66}{77}=\frac{6}{7}=\frac{6\cdot6\cdot8}{7\cdot6\cdot8}$; $\frac{77}{88}=\frac{7}{8}=\frac{7\cdot6\cdot7}{8\cdot6\cdot7}$; 280 $\begin{array}{r}48\\ \times6\\ \hline 288\end{array}$ $\begin{array}{r}49\\ \times6\\ \hline 294\end{array}$

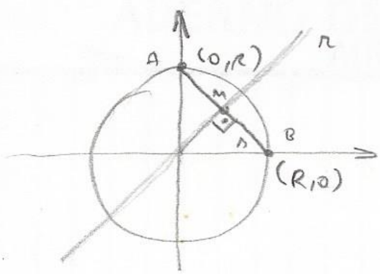
⑦ a) $L(1\cdot1)=L(1)+L(1) \to L(1)=0$

b) $L(\frac{1}{x}\cdot x)=L(\frac{1}{x})+L(x)=0 \to L(\frac{1}{x})=-L(x)$

c) $L(x\cdot\frac{1}{y})=L(x)+L(\frac{1}{y})$ Do item b $\to L(\frac{x}{y})=L(x)-L(y)$

d) $L(x^{m-1}\cdot x)=L(x^{m-2}\cdot x)+L(x)=L(x^{m-3}\cdot x)+2L(x)=\dots=L(x^{m-m}$

⑧



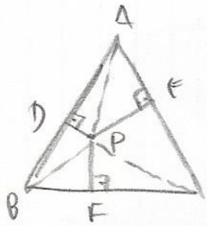
reta s: $y=\frac{R}{-R}(x-R)$ $m_s=-1$

$y=R-x$ $r\perp s$

reta r: $m_r=1 \to y=x$; $(\frac{R}{2},\frac{R}{2})\in r$

$M=(\frac{R}{2},\frac{R}{2})$ é o médio do segmento AB

⑨



$S_{\Delta APB} \to \frac{l\cdot PD}{2}$

$S_{\Delta APC} \to \frac{l\cdot PE}{2}$

$S_{\Delta BPC} \to \frac{l\cdot PF}{2}$

(+) $S_{ABC}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{l}{2}\cdot S$

$S=\frac{l\sqrt{3}}{2}$ = cte.

⑩ $\operatorname{sen}x-\cos x=2\operatorname{sen}x\cos x-(2\cos^2x-1)-1=2\operatorname{sen}x\cos x-2\cos^2x=$

$\cos2x=1-2\operatorname{sen}^2x=2\cos^2x-1$

$=2\cos x(\operatorname{sen}x-\cos x)$

• $\operatorname{sen}x=\cos x \to \operatorname{tg}x=1 \to x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

• $1=2\cos x \to \cos x=\frac{1}{2} \to x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$