1º ANO C.F.G. 90/91

9ª Questão: ÁLG., AN., G. ANALÍTICA — Valor: 1,0

Seja o quadrado OABC cujos vértices são a origem e os pontos $A(1,1)$; $B(0,2)$; $C(-1,1)$. Seja $F(0,1)$ o centro desse quadrado e (P) a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abcissas. Pede-se:

1) Mostre que (P) passa por A e C.
2) Determine a equação dessa parábola.
3) Calcule as coordenadas do ponto D, segundo ponto de interseção da reta BC com (P).
4) Seja M um ponto qualquer de (P) cuja abcissa é x. Mostre que a potência de M em relação ao círculo (Γ) de diâmetro $\overline{CD}$ é $\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3)$.
5) A partir do resultado anterior, encontre o conjunto dos pontos de (P) interiores a (Γ).

10ª Questão: — Valor: 1,0

a) A partir do estudo da variação do sinal das funções $f(x) = \ln(1+x) - x$ e $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ deduza a relação $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $\forall x \in (0, +\infty)$

b) Sendo $n \in \mathbb{Z}^+$, seja

$$P(n) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)$$

Mostre que se $n \to \infty$, $P(n)$ admite um limite e calcule esse limite.

②

GEOMETRIA e TRIGONOMETRIA

1ª Questão: — Valor: 1,0

Sejam um círculo, com centro O e raio R, e um ponto P tal que $\overline{OP} = 3R$

a) Determine um diâmetro $\overline{MN}$ de modo que o triângulo PMN seja retângulo com ângulo reto em M.
b) Calcule em função de R, os lados e a área do triângulo PMN.
c) PN intercepta a circunferência em um segundo ponto K. Calcule $\overline{PK}$.
d) O diâmetro $\overline{MN}$ gira em torno de O. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P sobre MN?
e) Determine a posição do diâmetro $\overline{MN}$ para que a área do triângulo PMN seja máxima.

2ª Questão: — Valor: 1,0

Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num plano. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes ao círculo dado (exteriormente) e à reta dada.

3ª Questão: — Valor: 1,0

Sejam dois quadrados ABCD e ABEF, tendo um lado comum AB, mas não situados num mesmo plano. Sejam M e N pertencentes, respectivamente, às diagonais AC e BF tais que $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Mostre que MN é paralelo a DE.

4ª Questão: — Valor: 1,0

Q: Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo. Mostre que

$$\text{Sen } 2A + \text{sen } 2B + \text{sen } 2C = 4 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C.$$

1º ANO CFG 90/91 (3)

GEOM. E TRIGON.

5ª Questão: Valor: 1,0

Mostre que: Se num triângulo ABC vale a relação

$$\frac{\cos (B - C)}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} (C - B)} = \operatorname{tg} B$$

então o triângulo é retângulo com ângulo reto A.

6ª Questão: Valor: 1,0

Seja um cone reto de base circular, vértice V, altura h e raio da base r e seja ABC um triângulo equilátero circunscrito à base do cone. Pede-se:

a) Determinar a relação entre h e r para que o tetraedro, com vértices VABC, seja regular.

b) Satisfeitas essas condições, calcule, em função de r, o volume limitado pela superfície do cone, pelo plano de sua base e pelos dois planos tangentes que passam pela aresta VA.

7ª Questão: Valor: 1,0

Resolver o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 6 \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} + \dfrac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = -6 \end{cases}$$

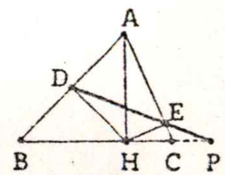
sabendo que x e y pertencem ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

8ª Questão: Valor: 1,0

Seja, sobre uma esfera, um círculo máximo (C) com diâmetro $\overline{AB} = 2R$. Traçam-se: uma corda $\overline{MN}$ do círculo (C), paralela a AB, e duas retas x e y perpendiculares ao plano do círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e passando, respectivamente, por M e N. Os planos definidos pelo ponto A e a reta x e o definido pelo ponto A e a reta y cortam a esfera segundo dois círculos. Mostre que quando MN varia, mantendo-se paralela a AB, a soma dos quadrados de seus raios é constante.

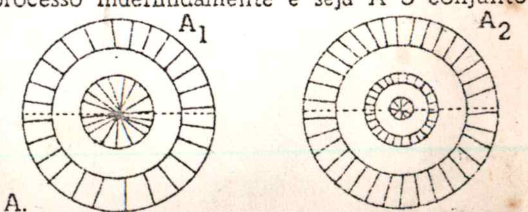
9ª Questão: Valor: 1,0

Num triângulo ABC traçamos a altura $\overline{AH}$ e do pé H dessa altura construimos as perpendiculares $\overline{HD}$, $\overline{HE}$ sobre os lados AB e AC; seja P o ponto de interseção de DE com BC. Construindo as alturas relativas aos vértices B e C determina-se também, de modo análogo, os pontos Q e R sobre os lados CA, AB. Demonstre que os pontos P, Q, R são colineares.



10ª Questão: Valor: 1,0

Q: No plano, considere um disco de raio R, chame este conjunto de A_0. Divida um raio de A_0 em três segmentos congruentes e retire de A_0 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R$ e $\frac{2}{3}R$, chame este conjunto de A_1. O conjunto A_1 contém um disco de raio $R_1 = \frac{1}{3}R$, divida um raio deste disco em três segmentos congruentes e, mais uma vez, retire de A_1 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R_1$ e $\frac{2}{3}R_1$, chame este conjunto de A_2. Continue esse processo indefinidamente e seja A o conjunto resultante.



a) Calcule a área do conjunto A_n obtido após a n-ésima etapa do processo descrito acima.

b) Calcule a área do conjunto resultante A.