IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 1

1ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Determine o valor de

$$P = \text{sen}\,\frac{\pi}{24}\ \text{sen}\,\frac{5\pi}{24}\ \text{sen}\,\frac{7\pi}{24}\ \text{sen}\,\frac{11\pi}{24}$$

SOLUÇÃO

$$\text{sen}\,p\ \text{sen}\,q = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right.$$

$$\frac{1}{2}\left[-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\text{sen}\,\frac{11\pi}{24}\cdot\text{sen}\,\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{10\pi}{24} - \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{0}\right] = \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{12}$$

$$\text{sen}\,\frac{7\pi}{24}\ \text{sen}\,\frac{5\pi}{24} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} - \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{0}\right] = \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$$

$$\cos p\cos q = \frac{1}{2}\left[\cos(p+q) + \cos(p-q)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\cancel{\cos\frac{\pi}{2}} + \cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 2

2ª QUESTÃO VALOR: 1,0

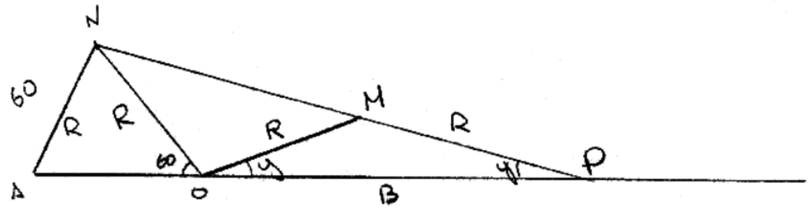
Seja $\overline{AB}$ um diâmetro de um círculo de centro O e raio R. Sobre o prolongamento de $\overline{AB}$ escolhemos um ponto $P(\overline{PB} < \overline{PA})$. Partindo de P tomamos uma secante que corta o círculo nos pontos M e N $(\overline{PM} < \overline{PN})$, de modo que $\overline{PM} = \overline{AN} = R$.

a) Mostre que a corda $\overline{MB}$ é um lado de um polígono regular inscrito de dezoito lados.

b) Encontre uma equação (do 3º grau) que determina a distância de P ao centro do círculo em função de R.

SOLUÇÃO

a)



$$y = \frac{60 - y}{2} \rightarrow y = 20 = \frac{360}{18}$$

$$MB = l_{18}$$

b) $PM \times PN = x^2 - R^2$

$$R \times PN = x^2 - R^2 \therefore PN = \frac{x^2}{R} - R$$

$$\begin{cases} \Delta ANP \rightarrow R^2 = \left(\frac{x^2}{R} - R\right)^2 + (x+R)^2 - 2\left(\frac{x^2}{R} - R\right)(x+R)\cos y \\ \Delta ONP \rightarrow R^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos y \therefore \cos y = \frac{x}{2R} \end{cases}$$

$$R^2 = \frac{x^4}{R^2} + R^2 - 2x^2 + x^2 + R^2 + 2Rx - 2\left(\frac{x^3}{R} + x^2 - Rx - R^2\right)\frac{x}{2R}$$

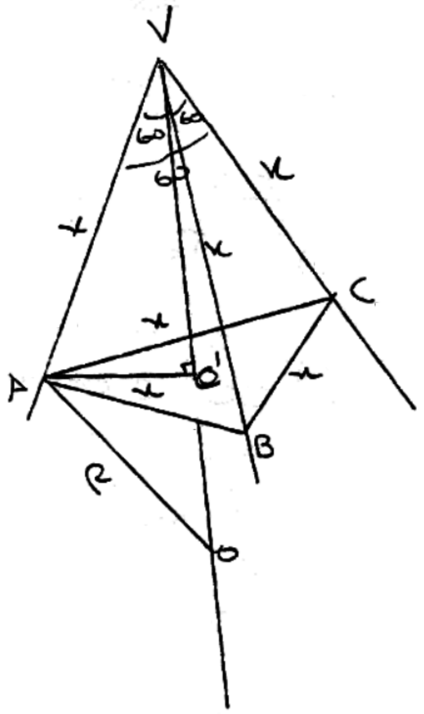
$$0 = \cancel{\frac{x^4}{R^4}} - x^2 + R^2 + 2Rx - \cancel{\frac{x^4}{R^2}} - \frac{x^3}{R} + x^2 + Rx$$

$$\frac{x^3}{R} - 3Rx - R^2 = 0$$

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 3
3ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Considere uma esfera de raio R. Determine a figura geométrica à qual pertence o lugar geométrico dos vértices dos triedros nos quais as três arestas são tangentes a essa esfera e formam, duas a duas, ângulos de 60^o.

SOLUÇÃO



$\triangle VAO \sim \triangle VC'A$

$$\frac{VA}{VO} = \frac{AC'}{AO} \quad \left\{ \begin{array}{l} VA = x \\ AC' = \end{array} \right.$$

$$\frac{x}{VO} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{3}}{R} \rightarrow VO = R\sqrt{3}$$

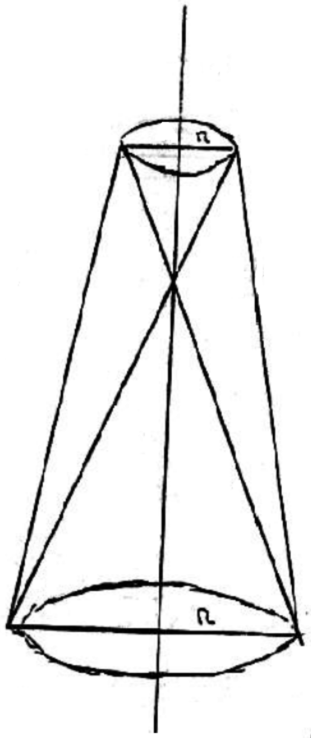
$V \in$ esfera$(O, R\sqrt{3})$

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 4

4ª QUESTÃO — VALOR: 1,0

Dois círculos de raios R e r são, ao mesmo tempo, bases de um tronco de cone e bases de dois cones opostos de mesmo vértice e mesmo eixo. Seja K a razão entre o volume do tronco e a soma dos volumes dos dois cones opostos e seja m a razão $\frac{R}{r}$. Determine m em função de K.

$$\frac{\pi H}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right.$$



$$m = \frac{R}{r}$$

$$K = \frac{\frac{\cancel{\pi}\cancel{h}}{\cancel{3}}\left(r^2 + Rr + R^2\right)}{\frac{\cancel{\pi}\cancel{h}}{\cancel{3}}\left(r^2 - Rr + R^2\right)} \rightarrow$$

$$K = \frac{\cancel{r^2} + m\cancel{r^2} + m^2\cancel{r^2}}{\cancel{r^2} - m\cancel{r^2} + m^2\cancel{r^2}}$$

$$K = \frac{m - m^2 - 1}{m^2 - m + 1} \longrightarrow$$

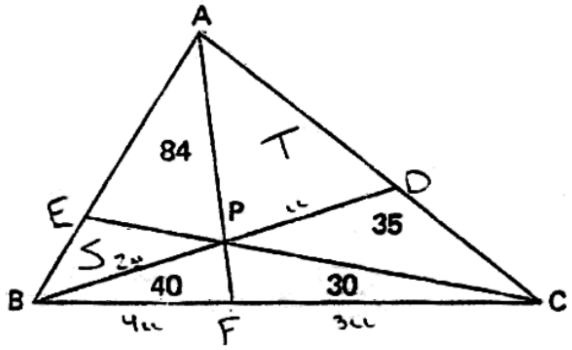
$$(k+1)m^2 - (k+1)m + (k+1) = 0$$

$$m = \frac{k + 1 \pm \sqrt{-3k^2 + 10k - 3}}{2(k-1)}$$

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 5

5ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 30, 35 e 84, como mostra a figura. Calcule a área do triângulo ABC.



SOLUÇÃO

$$\frac{70}{105} = \frac{BP}{BD} \rightarrow \frac{BP}{BD} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{40}{105} = \frac{2}{3}\cdot\frac{BF}{BC} \rightarrow \frac{\cancel{3}\cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}\cdot 21} \therefore \frac{4}{7} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{124+S}{T+65} \therefore 4(T+65) = 3(124+S)$$

$$4T+260 = 372+3S$$

$$4T-3S = 112$$

$$\frac{2}{1} = \frac{S+84}{T} \therefore 2T = S+84$$

$$2T - S = 84 \rightarrow \begin{cases} -4T+2S = -168 \\ 4T-3S = 112 \end{cases}$$

$$-S = -56$$

$$S = 56$$

$$4T = 112 + 3\cdot 56$$

$$4T = 280$$

$$T = 70$$

$$S_{\Delta ABC} = 84+56+70+40+30+35$$

$$S = 315$$

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 6

6ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja um segmento fixo OA de comprimento $\underline{a}$ e uma semi-reta variável Ox tal que $A\hat{O}x = \alpha$, α ângulo agudo, pertencentes a um plano fixo π. Seja a perpendicular ao plano π em A e seja B pertencente a esta perpendicular tal que AB = $\underline{a}$. Seja C o pé da perpendicular traçada de B sobre Ox. Pedidos:

a) Qual a propriedade comum a todas as faces do tetraedro OABC?

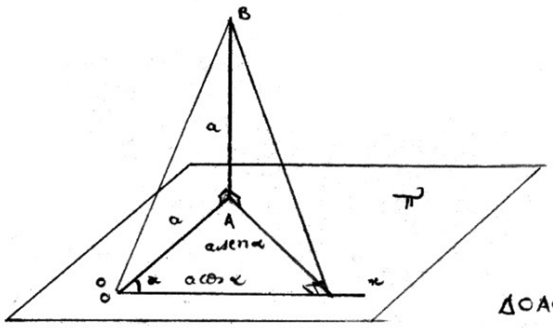
b) Calcule o comprimento das seis arestas de OABC em função de $\underline{a}$ e α.

c) Calcule o volume v do tetraedro em função de $\underline{a}$ e α.

d) Determine α de modo que $v = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (existem dois valores).

e) Determine o volume comum aos dois sólidos encontrados no item anterior.

SOLUÇÃO



a) Teor 3 perp. → $\begin{cases} BA \perp \pi \\ BC \perp Ox \end{cases}$ → $AC \perp Ox$

Todas as faces são triângulos retângulos

b) $OA = a$; $AB = a$

$\Delta OAC \rightarrow OC = a\cos\alpha$

$AC = a \operatorname{sen}\alpha$

$\Delta BAC \rightarrow BC = a\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\alpha}$

$\Delta BAO \rightarrow BO = a\sqrt{2}$

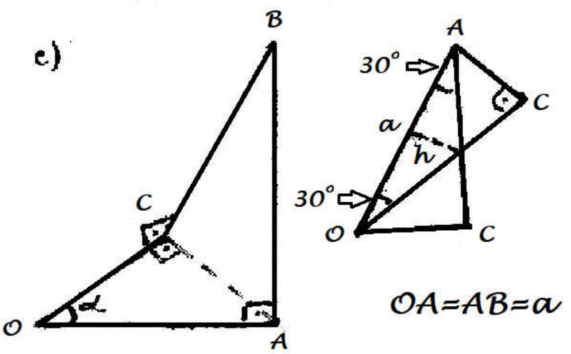
c) $V = \frac{1}{3}B\times h = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\, a\cos\alpha\, a\operatorname{sen}\alpha \times a$

$V = \frac{1}{12}a^3\operatorname{sen}2\alpha$

d) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24} \rightarrow \dfrac{1}{12}a^3\operatorname{sen}2\alpha = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24} \rightarrow \operatorname{sen}2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} 2\alpha = 60 \rightarrow \alpha = 30^\circ \\ 2\alpha = 120 \rightarrow \alpha = 60^\circ \end{cases}$

e)



OA=AB=a

$\dfrac{h}{\frac{a}{2}} = tg\, 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad h = a\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$Área = \dfrac{a\,h}{2} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

$Volume = \dfrac{a^2\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 8
7ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

a) Obtenha a expressão para tg 3α em função de tg $\alpha = x$.

b) Utilize o item anterior para determinar as soluções da equação

$$x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$$

onde m é um número real dado.

SOLUÇÃO

a) $tg(3\alpha) = tg(2\alpha + \alpha) = \dfrac{tg\,2\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,2\alpha\, tg\,\alpha}$

$tg(3\alpha) = \dfrac{\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} + tg\alpha}{1 - \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot tg\alpha}$ $\quad tg\alpha = \dfrac{2tg\alpha + tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - tg^2\alpha - 2tg^2\alpha}$

$tg(3\alpha) = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$ $\quad \rightarrow tg\,3x = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

b) $x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$

$tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$

$tg^3\alpha - 3\,tg\,3\alpha\, tg^2\alpha - 3\,tg\,\alpha + tg\,3\alpha = 0$

seja α tal que $m = tg\alpha$ $\quad$ Basta $3\alpha = arc\,Tg\,m + k\pi$

(sempre existe α) $\quad \rightarrow \alpha = \frac{1}{3} arc\,tg\,m + \frac{k\pi}{3}$

$\rightarrow tg^3\alpha - 3m\,tg^2\alpha - 3tg\alpha + m = 0$

$x = tg\alpha$ é raiz da equação $x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$

Os infinitos valores de α são representados no círculo trigonométrico por 6 pontos. Valores estes que geram apenas 3 possíveis valores p/ $x = tg\alpha$

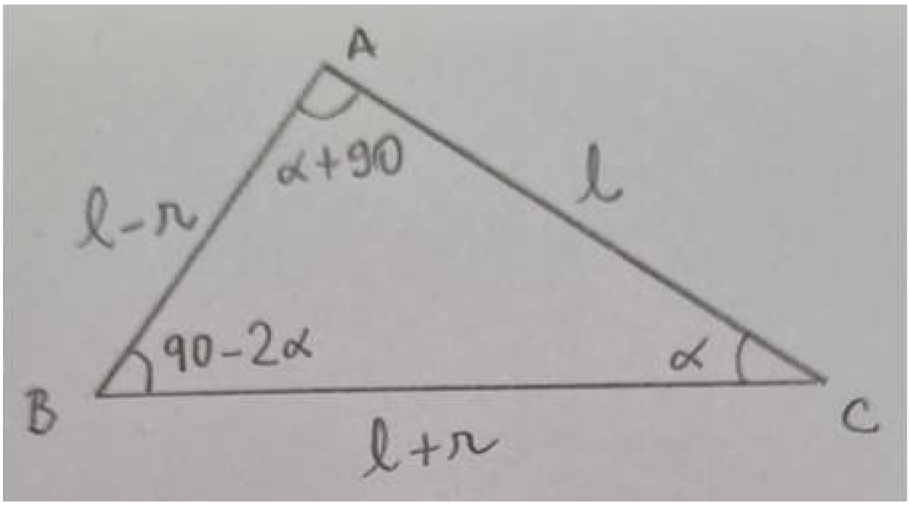
As raízes da equação são

$x = tg\left(\frac{1}{3} arc\,tg\,m\right)$; $x = tg\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} arc\,Tg\,m\right)$; $x = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3} arc\,Tg\,m\right)$

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 10
8ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética e o lado intermediário mede ℓ. Sabendo-se que o maior ângulo excede o menor em 90°, calcule a razão entre os lados.

SOLUÇÃO



Lei dos Senos: $\dfrac{\ell}{sen(90-2\alpha)} = \dfrac{\ell-r}{sen\alpha} = \dfrac{\ell+r}{sen(\alpha+90)} = 2R$

$$\frac{\ell}{cos2\alpha} = \frac{\ell-r}{sen\alpha} = \frac{\ell+r}{cos\alpha} = 2R$$

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$\frac{\ell}{2R} = \frac{\ell^2+2\ell r+r^2}{4R^2} - \frac{\ell^2-2\ell r+r^2}{4R^2} = \frac{4\ell r}{4R^2} \quad \rightarrow \quad R=2r$$

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

$$\frac{\ell^2-2\ell r+r^2}{4R^2} + \frac{\ell^2+2\ell r+r^2}{4R^2} = \frac{2\ell^2+2r^2}{16r^2} = 1$$

$$\ell^2 + r^2 = 8r^2 \rightarrow \ell^2 = 7r^2 \rightarrow r = \frac{\ell\sqrt{7}}{7}$$

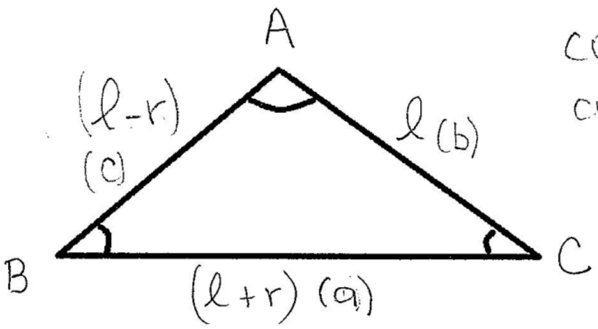
Botelho

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 10

8ª QUESTÃO — VALOR: 1,0

Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética e o lado intermediário mede ℓ. Sabendo-se que o maior ângulo excede o menor em 90^{o}, calcule a razão entre os lados.

SOLUÇÃO



$$\cos(90^{\circ} - 2\hat{C}) = \operatorname{sen} 2\hat{C}$$

$$\cos(90^{\circ} + \hat{C}) = \underbrace{\cos 90^{\circ}}_{0}\cos\hat{C} - \underbrace{\operatorname{sen} 90^{\circ}}_{1}\operatorname{sen}\hat{C}$$

$$\cos(90^{\circ} + \hat{C}) = -\operatorname{sen}\hat{C}$$

1) Lei dos cossenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

$$\cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{(\ell+r)^2 + \ell^2 - (\ell-r)^2}{2(\ell+r).(\ell)}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{(\ell + 4r)}{2(\ell + r)} \quad (1)$$

2) Da lei dos cossenos: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\operatorname{sen} 2\hat{C}$

$$\operatorname{sen} 2\hat{C} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\hat{C} = \frac{-\ell^2 + (\ell+r)^2 + (\ell-r)^2}{2(\ell+r)(\ell-r)}$$

$$\operatorname{sen} 2\hat{C} = \frac{2r^2 + \ell^2}{2(\ell^2 + r^2)} \quad (2)$$

3) Da Lei dos cossenos: $a^2 = c^2 + b^2 + 2cb\operatorname{sen}\hat{C}$

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{a^2 - c^2 - b^2}{2cb} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{(\ell+r)^2 - (\ell-r)^2 - \ell^2}{2(\ell-r).(\ell)}$$

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{4r - \ell}{2(\ell - r)} \quad (3)$$

$$\operatorname{sen} 2\hat{C} = 2\operatorname{sen}\hat{C} \cdot \cos\hat{C} \quad (4)$$

Substituindo (1), (2), (3) em (4), vem:

(continua)...

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 10

8ª QUESTÃO — VALOR: 1,0

(continuação)

$$\frac{2r^2+\ell^2}{\cancel{2(\ell^2-r^2)}} = \cancel{2}\cdot\frac{(4r-\ell)}{\cancel{2(\ell-r)}}\cdot\frac{(\ell+4r)}{\cancel{2(\ell+r)}}$$

$$2r^2+\ell^2 = 16r^2-\ell^2$$

$$14r^2 = 2\ell^2$$

$$r = \sqrt{\frac{\ell^2}{7}}$$

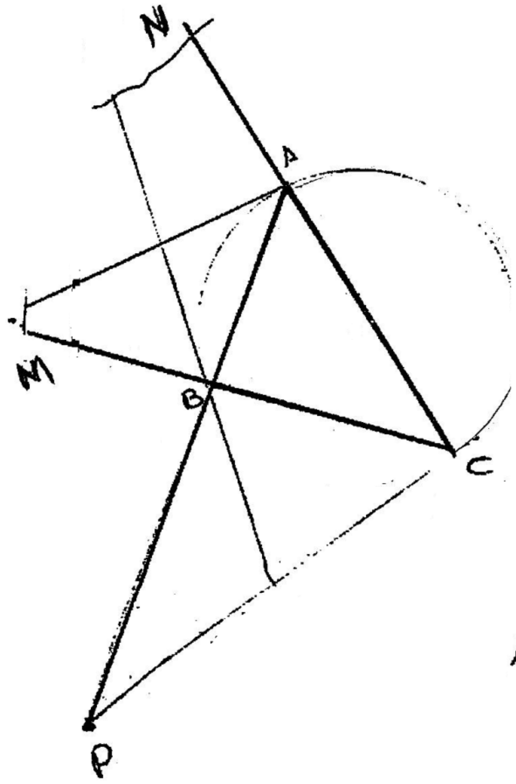
$$r = \frac{\sqrt{7}}{7}\ell \quad //$$

IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 11

9ª QUESTÃO — VALOR: 1,0

Prove que as tangentes ao círculo circunscrito a um triângulo, passando nos seus vértices, interceptam os lados opostos em três pontos colineares.

SOLUÇÃO



PROVAR: $\dfrac{NC}{NA} \times \dfrac{PA}{PB} \times \dfrac{MB}{MC} = 1$

$\triangle MAB \sim \triangle MAC$

$\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{AB}{AC}$ e $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{AC}{AB}$

$\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Análogo $\dfrac{NC}{NA} = \dfrac{BC^2}{BA^2}$ $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{CA^2}{CB^2}$

$\dfrac{MB}{MC} \times \dfrac{NC}{NA} \times \dfrac{PA}{PB} = 1$

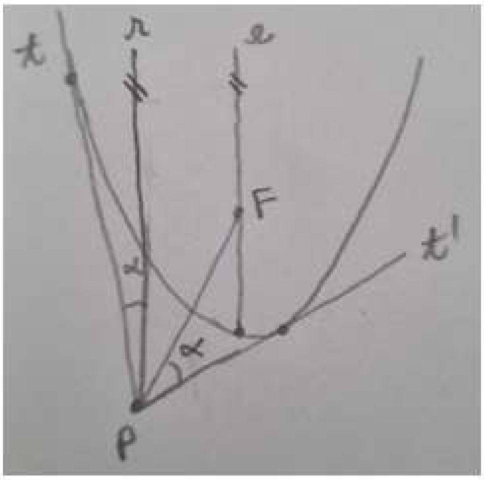
IME – CEE 89/90	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	FOLHA 12

10ª QUESTÃO	VALOR: 1,0

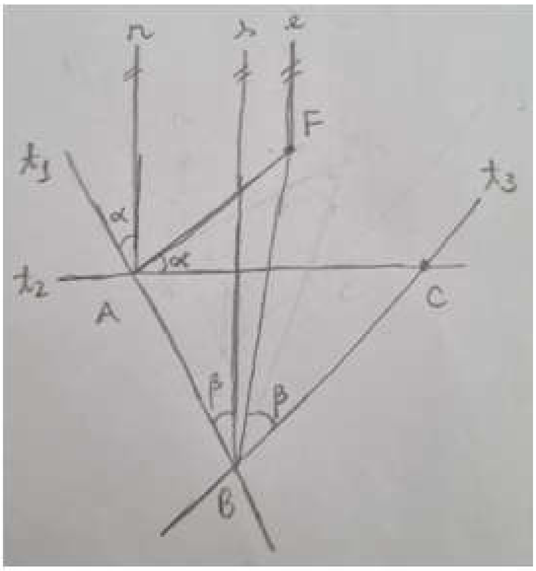
Seja um triângulo ABC cujos lados são tangentes a uma parábola. Prove que o círculo circunscrito ao triângulo passa pelo foco.

SOLUÇÃO

O teorema de Poncelet afirma que, dadas as tangentes t e t′ a uma parábola de foco F e eixo e, traçadas de um ponto externo P, o ângulo α entre t e a reta r, paralela ao eixo traçada por P, e o ângulo α entre t′ e a reta PF são iguais:



Vamos aplicar o teorema nos pontos A (tangentes t_1 e t_2) e B (tangentes t_1 e t_3) do triângulo ABC:



Botelho

10ª QUESTÃO VALOR: 1,0

(continuação)

O ângulo α entre t_1 e r (paralela a "e" por A) é o ângulo α entre AF e t_2.

O ângulo β entre t_1 e s (paralela a "e" por B) é o ângulo β entre BF e t_3.

Mas os ângulos α (entre t_1 e r) e β (entre t_1 e s) são correspondentes (iguais), já que r e s são paralelas.

Como os ângulos FAC=α e FBC=β são iguais, os pontos A e B pertencem ao arco capaz de ângulo α=β sobre CF.

Este arco capaz é uma circunferência que passa por A, B, C e F.

Ora, a circunferência que passa por A, B e C é a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Logo, F pertence a ela.

Botelho