

IME - CEE 88/89

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

Handwritten signature

FOLHA 4

1a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Resolva a seguinte desigualdade:

$$\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} \geq 2 \text{ para } 0 \leq x \leq \pi$$

SOLUÇÃO

2a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Numa circunferência de centro O e diâmetro $AB = 2R$, prolonga-se o diâmetro AB até um ponto M, tal que $BM = R$.

Traça-se uma secante MNS tal que $MN = NS$, onde N e S são os pontos de interseção da secante com a circunferência.

Determine a área do triângulo MOS.

SOLUÇÃO

3a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Sejam ABC e ACD dois triângulos retângulos isósceles com o lado AC comum, e os vértices B e D, situados em semiplanos distintos em relação ao lado AC; nestes triângulos $AB = AC = a$ e $AD = CD$.

- calcule a diagonal BD, do quadrilátero ABCD;
- seja E o ponto de interseção de AC com BD. Calcule BE e ED;
- seja F a interseção da circunferência de diâmetro BC com a diagonal BD. Calcule DF e EF.

SOLUÇÃO

4a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Mostre que a área total do cilindro equilátero inscrito em uma esfera é média geométrica entre a área da esfera e a área total do cone equilátero inscrito nessa esfera.

SOLUÇÃO

IME - CEE 88/89

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

M. L.

FOLHA 5

5a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Mostre que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a igualdade $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$, então o triângulo é retângulo.

SOLUÇÃO

6a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Seja ABC um triângulo retângulo isósceles, com $AB = AC = a$.
Sejam BB' e CC' dois segmentos de comprimento a , perpendiculares ao plano ABC e situados no mesmo semi-espaco, em relação a este plano.

- calcule a área total da pirâmide de vértice A e base $BCC'B'$;
- calcule o volume desta pirâmide;
- mostre que os pontos A, B, C, C' e B' pertencem a uma esfera;
- determine o centro e o raio desta esfera.

SOLUÇÃO

7a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Seja ABCD um trapézio cuja base maior $AB = a$ é fixa e cuja base menor CD tem comprimento constante, igual a b . A soma dos lados não paralelos é constante e igual a l . Os prolongamentos dos lados não paralelos se cortam em I.

- demonstre que o l.g. descrito pelo ponto I, quando a base CD se desloca, é uma cônica;
- determine eixos e distância focal.

SOLUÇÃO

8a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

São dados um segmento AB e os pontos C e D, que o dividem, interna e externamente numa mesma razão.

Mostre que as circunferências de diâmetro AB e CD são ortogonais.

SOLUÇÃO

IME - CEE 88/89

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

FOLHA 6

9a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Seja um quadrado de lado a e um ponto P , exterior ao quadrado. Chame de "ângulo sob o qual o quadrado é visto do ponto P " o menor ângulo com vértice em P , que contenha o quadrado.

Determine o lugar geométrico dos pontos P , de onde o quadrado é visto sob um ângulo de 45° .

SOLUÇÃO

10a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta a . Seja O o baricentro da face ABC . Efetua-se uma translação do tetraedro igual a $\frac{\vec{AO}}{2}$, obtendo-se um novo tetraedro $A'B'C'D'$.

- Determine o volume da esfera inscrita no sólido comum aos tetraedros $ABCD$ e $A'B'C'D'$.
- Determine o volume da esfera circunscrita a este sólido.

SOLUÇÃO