1a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Demonstre que, num triângulo ABC,

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$$

SOLUÇÃO

$$\frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C} = \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{B-C}{2}}}{\cancel{2}\cos\frac{B+C}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{B-C}{2}}} = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{tg}\left(90^{o} - \frac{A}{2}\right) =$$

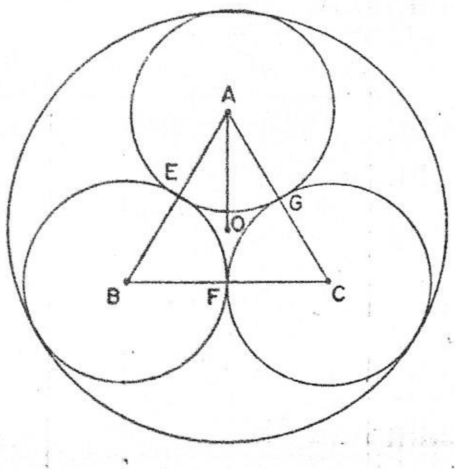
$$= \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

2a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Dado um círculo de raio R e centro O, constrói-se 3 círculos iguais de raios r, tangentes dois a dois, nos pontos E, F, G e tangentes interiores ao círculo dado. Determine, em função de R, o raio destes círculos e a área da superfície EFG, compreendida entre os três círculos e limitada pelos arcos EG, GF e FE.

SOLUÇÃO



$r\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{3}\right) = R$ $\to r = 3R\left(\frac{1}{2\sqrt{3}+3}\right)$

$r = \frac{3R(2\sqrt{3}-3)}{3}$

$$AB = 2r \to OA = 2r\frac{\sqrt{3}}{3} = R - r \to \underline{r = R(2\sqrt{3} - 3)}$$

$$S_{EFG} = S_{ABC} - 3 \cdot S_{\text{setor } AEG} =$$

$$= \frac{4r^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{\pi r^2}{6} = r^2\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{r^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi) =$$

$$= \frac{1}{2} R^2 (2\sqrt{3} - 3)^2 (2\sqrt{3} - \pi)$$

$$\rightarrow \boxed{S_{EFG} = \frac{R^2}{2}(21 - 12\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \pi)}$$

3a. QUESTÃO — VALOR: 1,0

Demonstre a identidade

$$tg^2 x + ctg^2 x = 2\left(\frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}\right)$$

SOLUÇÃO

$$2 \cdot \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x} = 2 \cdot \frac{3 + 2\cos^2 2x - 1}{1 - (1 - 2\,sen^2 2x)} = \cancel{2} \cdot \frac{2 + 2\cos^2 2x}{\cancel{2}\, sen^2 2x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1 + \cos^2 2x}{sen^2 2x} = \cancel{2} \cdot \frac{(\cos^2 x + sen^2 x)^2 + (\cos^2 x - sen^2 x)^2}{\cancel{4}\, sen^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^4 x + \cancel{2\cos^2 x\, sen^2 x} + sen^4 x + \cos^4 x - \cancel{2\cos^2 x\, sen^2 x} + sen^4 x}{2\, sen^2 x \cos^2 x} =$$

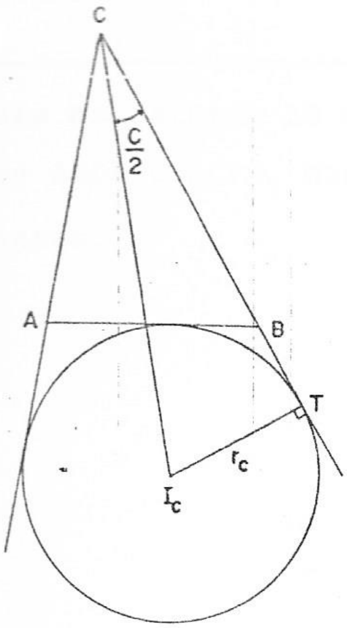
$$= \frac{\cancel{2}(\cos^4 x + sen^4 x)}{\cancel{2}\, sen^2 x \cos^2 x} = \frac{sen^{\cancel{4}} x}{\cancel{sen^2 x} \cos^2 x} + \frac{\cos^{\cancel{4}} x}{sen^2 x \cancel{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{sen^2 x} =$$

$$= tg^2 x + ctg^2 x$$

4a. QUESTÃO — VALOR: 1,0

Calcule o lado c de um triângulo ABC, em função de sua área S, do ângulo C e de k, onde $k = a + b - c$.



SOLUÇÃO

$$k = a+b-c = \underbrace{a+b+c}_{2p} - 2c \rightarrow k = 2(p-c)$$

$$S = (p-c).r_c = \frac{k}{2} . r_c \rightarrow r_c = \frac{2S}{k}$$

$$tg\ \frac{C}{2} = \frac{I_cT}{TC} = \frac{r_c}{p} \rightarrow p = r_c .\ ctg\ \frac{C}{2}$$

logo:

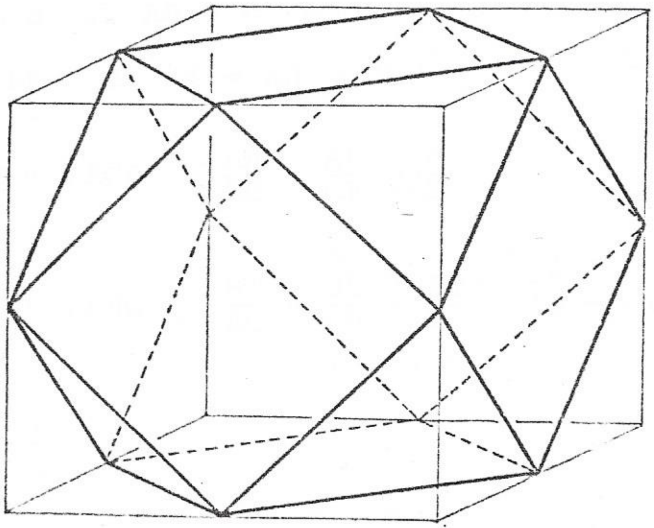
$$c = p-(p-c) \rightarrow \boxed{c = \frac{2S}{k} .\ ctg\ \frac{C}{2} - \frac{k}{2}}$$

5a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Secciona-se um cubo de aresta a por planos passando pelos pontos médios das arestas concorrentes em cada vértice. Considere o sólido formado ao retirar-se as oito pirâmides obtidas.

Calcule a soma das arestas, a área e o volume deste sólido.

SOLUÇÃO



6f4 → A=24
8f3 F=14
V=12

Soma das arestas: $S = 24 \times \frac{a\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{S = 12\ a\sqrt{2}}$

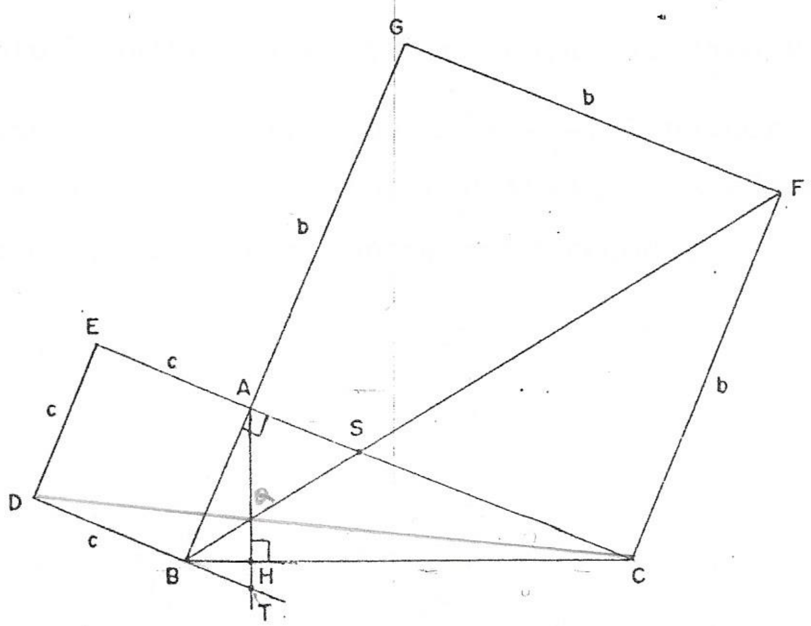
Área: $A = 6 . (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + 8 . \frac{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 . \sqrt{3}}{4} \rightarrow \boxed{A = a^2(3 + \sqrt{3})}$

Volume: $V = a^3 - 8 . \frac{(\frac{a}{2})^3}{6} \rightarrow \boxed{V = \frac{5a^3}{6}}$

6a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Sobre os catetos AB e AC de um triângulo ABC, c onstrõem-se dois quadrados ABDE e ACFG. Mostre que os segmentos CD, BF e a altura AH são concorrentes.

SOLUÇÃO



$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{c^2}{a}$

e

$CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{b^2}{a}$

Fazendo-se: AC = b e AB = c e

sendo: $S = AC \cap BF$ e $T = AH \cap BD$:

$$\Delta SAB \sim \Delta SCF \rightarrow \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b}$$

$$\Delta HBT \sim \Delta HAC \rightarrow \frac{BT}{AC} = \frac{BH}{CH} \rightarrow \frac{BT}{b} = \frac{c^2}{b^2} \rightarrow BT = \frac{c^2}{b}$$

Então:

$$\frac{BT}{BD} = \frac{c^2}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{c}{b}$$

Sobre as paralelas BD e AC temos $\frac{BT}{BD} = \frac{SA}{SC} \rightarrow$ Isto só é possível se CD interceptar $BF \cap AH \equiv Q$

$\rightarrow$ as retas AT, BS e CD concorrem em um mesmo ponto.

7a. QUESTÃO VALOR: 1,0

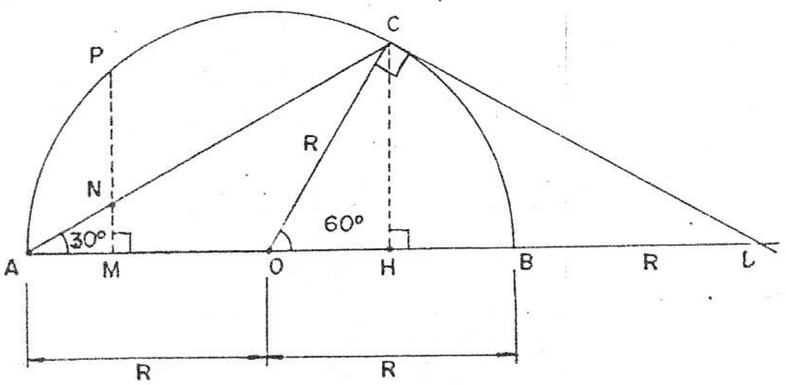
Considere um semicírculo de diâmetro AB = 2R. Por A, traça-se uma reta que forma um ângulo de 30° com o diâmetro AB e que corta o semicírculo em C. Por C, traça-se a tangente ao semicírculo, que intercepta a reta que contém AB no ponto D.

Fazendo-se uma rotação em torno da reta que contém AB, o semicírculo gera uma esfera E e o triângulo ACD gera um sólido S.

a) calcule o volume deste sólido S, em função do raio R.

b) seja M um ponto sobre AB tal que $AM = \frac{R}{3}$. Considere um plano π passando por M e perpendicular à reta AB, seccionando a esfera E e o sólido S. Calcule a razão entre as áreas destas duas seções.

SOLUÇÃO



a) $V_S = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot CH^2 \cdot AD =$

$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{3R^2}{4} \cdot 3R \rightarrow \boxed{V_S = \frac{3\pi R^3}{4}}$

b) $\Delta OMP: \quad MP^2 = R^2 - \frac{4R^2}{9} = \frac{5R^2}{9}$

$\Delta AMN: \quad NM = AM \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{9}$

$\frac{S_1}{S_2} = (\frac{MN}{MP})^2 = \frac{R^2/27}{5R^2/9} \rightarrow \boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{15}}$ → A razão é 15.

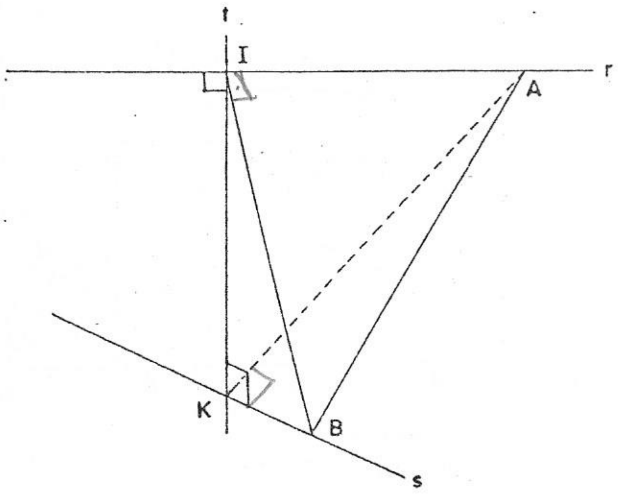
8a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Dadas duas retas reversas r e s, ortogonais e sua perpendicular comum t, que corta r em I e s em K; considere um segmento AB, de comprimento constante, que se move apoiando suas extremidades A e B, respectivamente sobre r e s. Unindo-se A a K e I a B, forma-se um tetraedro variável ABIK.

a) demonstre que a soma dos quadrados das arestas deste tetraedro é constante;

b) calcule o raio da esfera circunscrita ao tetraedro, em função da distância AB.

SOLUÇÃO



a) $\underline{r}$ e $\underline{s}$ ortogonais $\rightarrow A\hat{I}B = A\hat{K}B = 90^{\circ}$

$$AI^2 + BI^2 = AB^2$$

$$AK^2 + BK^2 = AB^2$$

Então:

$$AI^2 + KI^2 + KB^2 + AB^2 + BI^2 + AK^2 = 3AB^2 + KI^2 = \text{constante}$$

b) K e I pertencem à esfera de diâmetro AB

Então, $\underline{R = \frac{AB}{2}}$

. QUESTÃO VALOR: 1,0

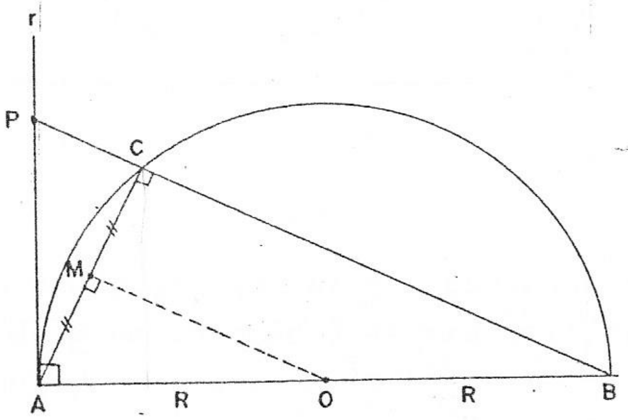
Seja o semicírculo de diâmetro AB = 2R e r sua tangente em A. Liga-se um ponto P da reta r ao ponto B, interceptando o semicírculo no ponto C.

a) demonstre que o produto PB.BC é constante;

b) determine o lugar geométrico do ponto médio de AC, quando P desloca-se sobre a tangente;

c) seja $AP = \frac{PB}{2}$;
calcule a área da porção do triângulo PAB, situada no exterior do semicírculo.

SOLUÇÃO



a) $\Delta ABC \sim \Delta PAB \rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{PB} \rightarrow PB \,.\, BC = AB^2 = 4R^2$

b) $O\hat{M}A = 90^o \rightarrow \underline{M}$ pertence ao semicírculo de diâmetro OA

c) $AP = \frac{PB}{2} \rightarrow A\hat{B}P = 30^o$

$PA = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

$$S = S_{PAB} - S_{OBC} - S_{setor\ OAC} = \frac{1}{2} .2R. \frac{2R\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}.R. \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{6} =$$

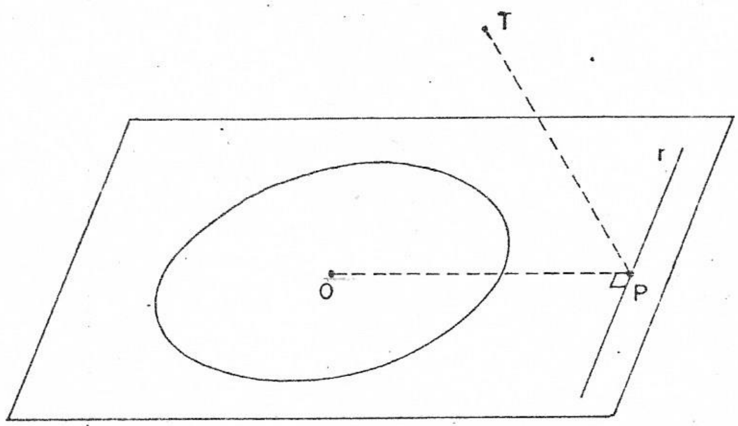
$$= \frac{5R^2\sqrt{3}}{12} - \frac{\pi R^2}{6}$$

$$\rightarrow \underline{S = \frac{R^2}{12}(5\sqrt{3} - 2\pi)}$$

10a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Considere as esferas cuja interseção com um plano π é um círculo fixo C. Seja r uma reta do plano π, exterior ao círculo. Determine o lugar geométrico dos pontos de contato dos planos tangentes a tais esferas e que contêm a reta r.

SOLUÇÃO



Considerando o círculo (O, R) e a projeção ortogonal P de O em r, a potência de P em relação à esfera variável é igual a $d^2 - R^2$ (constante).

Sendo T o ponto de tangência do plano com a esfera, $PT^2 = d^2 - R^2$.

O lugar geométrico de T é o arco de círculo de centro P, raio $\sqrt{d^2 - R^2}$, contido no plano que passa por O e é perpendicular a r, exceto suas interseções com π.