

IME - CEE 86/87	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	Melo Jr	FOLHA 1
-----------------	---------------------------	---------	---------

1.^a QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja ABCD um quadrilátero circunscritível. Demonstre que os círculos inscritos nos triângulos ABC e ACD tem, com a diagonal AC, um mesmo ponto em comum.

2.^a QUESTÃO: VALOR: 1,0

Resolva a inequação

$$\frac{2\cos x + 2\sin x + \sqrt{2}}{\cos x - \sin x} < 0$$

3a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Sobre uma reta r marcam-se, nesta ordem, os pontos A, B, C e D. Em um dos semiplanos determinados por r , traçam-se as semicircunferências de diâmetros AB, CD e AD; no outro semiplano traça-se a semicircunferência de diâmetro BC.

Calcule a razão entre a área delimitada por estas semicircunferências e a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos médios das semicircunferências. Mostre que esta razão independe dos pontos A, B, C e D.

4a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja uma hipérbole equilátera de centro O e focos F e F'. Mostre que o segmento determinado por O e por um ponto M qualquer da hipérbole é média proporcional entre os segmentos MF e MF'.

5a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Dado um triângulo ABC de lados a, b, c opostos aos ângulos A, B, C respectivamente e de perímetro 2p, mostre que

$$a = \frac{p \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

6a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Sejam duas circunferências, não ortogonais, de centros O e O' que se interceptam em A e B . Sendo D e D' os pontos onde as retas $O'A$ e $O'A$ interceptam, respectivamente, as circunferências de centro O e O' , demonstre que o pentágono $BODD'O'$ é inscritível.

7a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Num plano π tem-se um retângulo $ABCD$ de dimensões $AB=2a$ e $AD=a$. Consideram-se a superfície prismática, cujas arestas são as retas perpendiculares a π , passando por A, B, C, D e um ponto C' , sobre a aresta traçada por C , tal que $CC'=b$.

Seccionando-se esta superfície por um plano passando por AC' ,

- a) mostre que é possível obter-se para seção plana um losango $AB'C'D'$, onde B' e D' são pontos das arestas que passam respectivamente por B e D .
- b) determine, em função de a e b , uma condição necessária e suficiente para que o losango esteja situado em um mesmo semi-espaço em relação ao plano π .
- c) calcule o volume do tronco de prisma $ABCDB'C'D'$, supondo satisfeitas as condições do item anterior.

8a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base igual a ℓ e altura h ,

- a) mostre que existem duas esferas tangentes aos planos das faces dessa pirâmide.
- b) calcule os raios dessas esferas.
- c) mostre que o produto desses raios independe de h .

9a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Sejam duas retas ortogonais r e r' , não coplanares. Considere sobre r dois pontos fixos A e B e sobre r' dois pontos variáveis M e M' , tais que a projeção de M' sobre o plano que contém o triângulo MAB é o ortocentro H deste triângulo.

Determine o lugar geométrico dos centros das esferas circunscritas ao tetraedro $ABMM'$.

10a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Sejam A, B, C, D, E os vértices de um pentágono regular inscrito num círculo e M um ponto qualquer sobre o arco \widehat{AE} .

Unindo-se M a cada um dos vértices do pentágono, mostre que os segmentos

$$MB + MD = MA + MC + ME$$