1a. QUESTÃO: Valor: 1,0

Seja um paralelepípedo retângulo de bases ABCD e A'B'C'D', cujas arestas AA', BB', CC' e DD' tenham por comprimento <u>h</u> e os lados da base sejam, respectivamente, AB = a e AD = b.

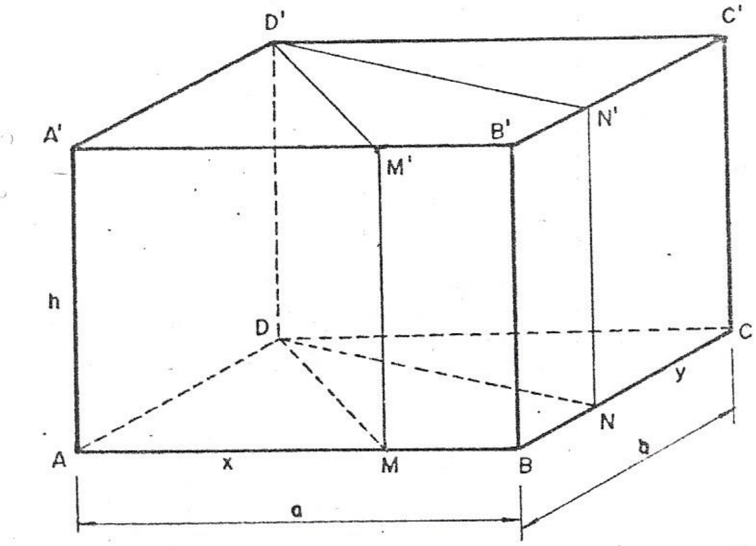
Por DD' considere dois planos DD'MM' e DD'NN'.

1º) Determine as distâncias AM = x e CN = y para que esses dois planos dividam o paralelepípedo em 3 partes de mesmo volume.

2º) Determine a razão entre os volumes dos sólidos MBNM'B'N' e MDNM'D'N'

3º) Encontre a relação entre <u>a</u> e <u>b</u>, que estabeleça a condição necessária e suficiente para que o diedro de arestas MM', cujas faces passem por DD' e NN', seja reto.

SOLUÇÃO



1º) $S_{ADM} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \Rightarrow \frac{xb}{2} = \frac{ab}{3} \Rightarrow x = \frac{2a}{3}$

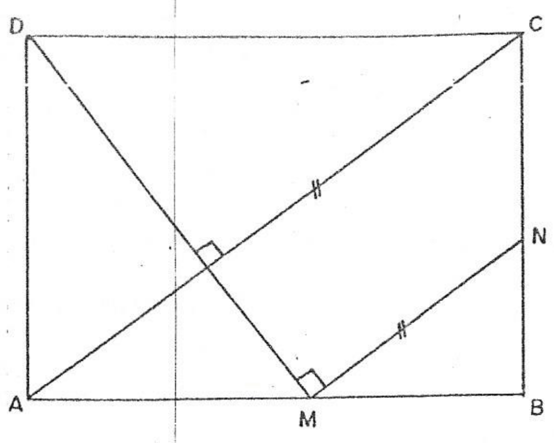
Analogamente, $y = \frac{2b}{3}$

2º) $S_{BMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{3} = \frac{ab}{18}$

$S_{DMN} = ab - \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot b - \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{3} \cdot a - \frac{ab}{18} = \frac{5ab}{18}$ ou $\frac{6ab}{18} - \frac{ab}{18} = \frac{5ab}{18}$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{BMN}}{S_{DMN}} = \frac{1}{5}$

3º)



$AC \perp DM \iff$

$\iff \Delta ADC \sim \Delta MAD \iff$

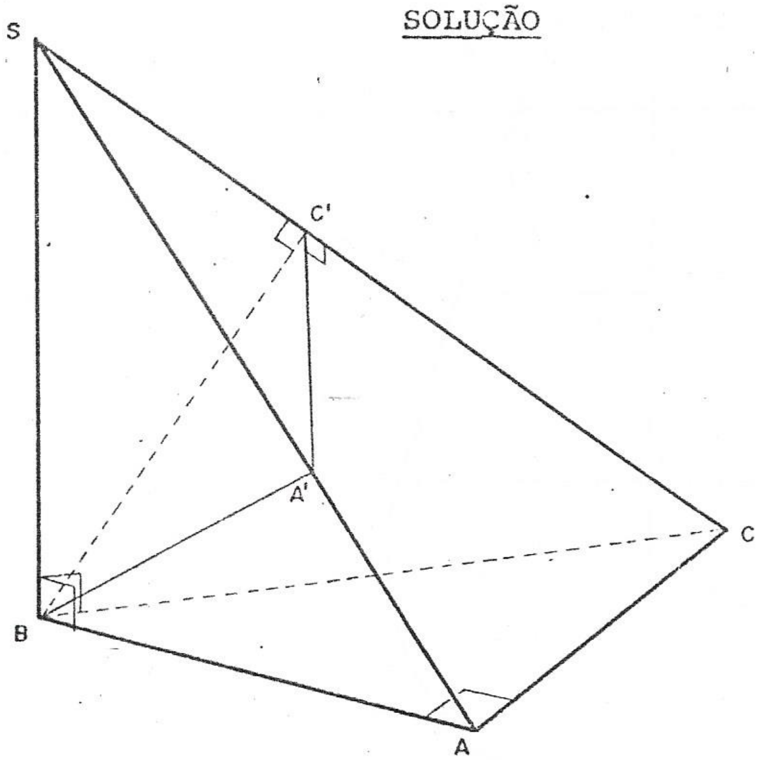
$$\iff \frac{AM}{AD} = \frac{AD}{CD} \iff$$

$$\iff \frac{\frac{2}{3}a}{b} = \frac{b}{a} \iff b^2 = \frac{2}{3}a^2 \quad \therefore \quad a = \frac{\sqrt{6}}{2} b$$

2a. QUESTÃO: Valor: 1,0

Seja um triângulo ABC, retângulo em A. Por B, traça-se uma reta perpendicular ao plano do triângulo. Sobre esta, fixa-se um ponto S. Por B, passa-se um plano que intercepta SC em C' e seja perpendicular a SC. O plano corta SA em A'. Demonstre que os cinco pontos A, B, C, A' e C' pertencem a uma mesma esfera.

SOLUÇÃO



$$\left.\begin{array}{l} SB \perp AC \\ BA \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp \text{plano } SAB \Rightarrow \text{plano } SAB \perp \text{plano } SAC$$

$SC \perp$ plano $BA'C'$ $\Rightarrow$ plano $BA'C' \perp$ plano SAC

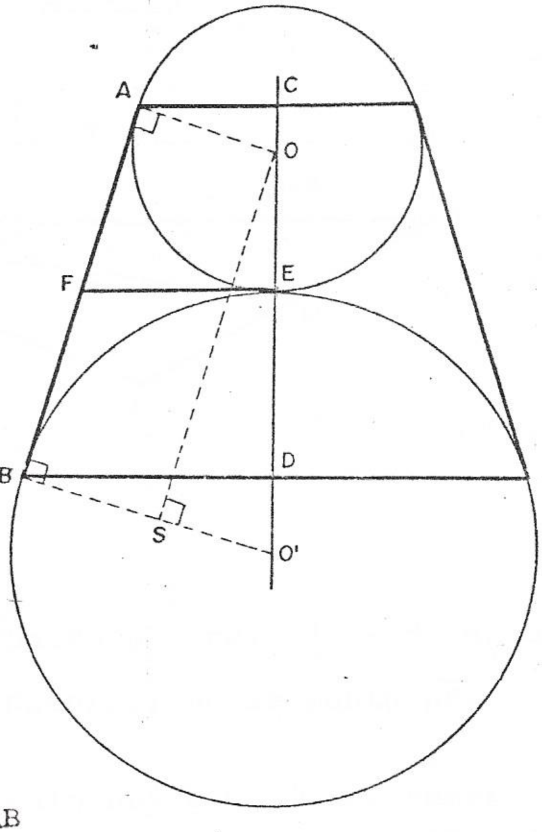
Logo, $BA' \perp$ plano SAC $\Rightarrow$ $B\hat{A}'C = 90^{\circ}$

Então, $B\hat{A}C = B\hat{C}'C = B\hat{A}'C = 90^{\circ}$ $\Rightarrow$ os pontos A, C', A' pertencem à esfera de diâmetro BC.

3a. QUESTÃO: Valor: 1,0

Dadas duas esferas de raios respectivamente iguais a R e r, tangentes exteriores, e um cone circunscrito a elas, calcule a área da superfície lateral do tronco de cone que tenha por bases os círculos de contato das esferas com o cone.

SOLUÇÃO



Δ OO'S:

$$\left.\begin{array}{l} OO' = R + r \\ O'S = R - r \end{array}\right\} \Rightarrow OS = 2\sqrt{Rr} = AB$$

A área é

$$S = \pi . AB(AC + BD) = \pi . AB . 2EF$$

Mas $EF = \dfrac{AB}{2}$. Então: $S = \pi AB^2 = 4\pi Rr$.

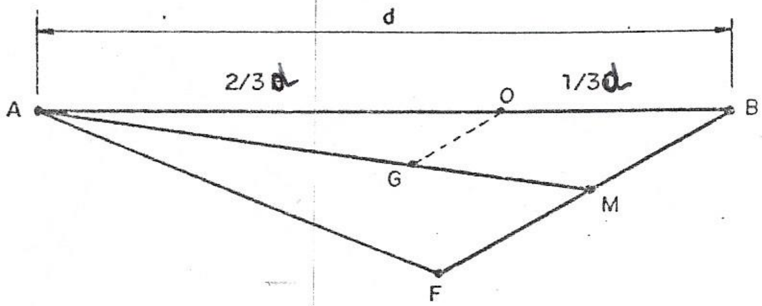
4a. QUESTÃO: Valor: 1,0

Dados dois pontos fixos A e B ($\overline{AB} = d$), considere as elipses passando por B, com foco em A e eixo maior de comprimento 2a, tal que $2a > d$.

1º) determine o lugar geométrico do segundo foco F das elipses

2º) determine o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos ABF.

SOLUÇÃO



1º) $BA + BF = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow BF = 2a - d$

O lugar de F é o círculo de centro B e raio $2a - d$, excetuando a interseção com a semi-reta $\overrightarrow{AB}$, exterior ao segmento $\overline{AB}$.

2º) Sendo G o baricentro do triângulo ABF e $GO \parallel BF$, temos

$AO = \frac{2}{3} d \Rightarrow O$ é ponto fixo.

$GO = \frac{2}{3} BM = \frac{2a - d}{3}$

O lugar de G é o círculo de centro O e raio $\frac{2a - d}{3}$, exceto as interseções com a reta AB.

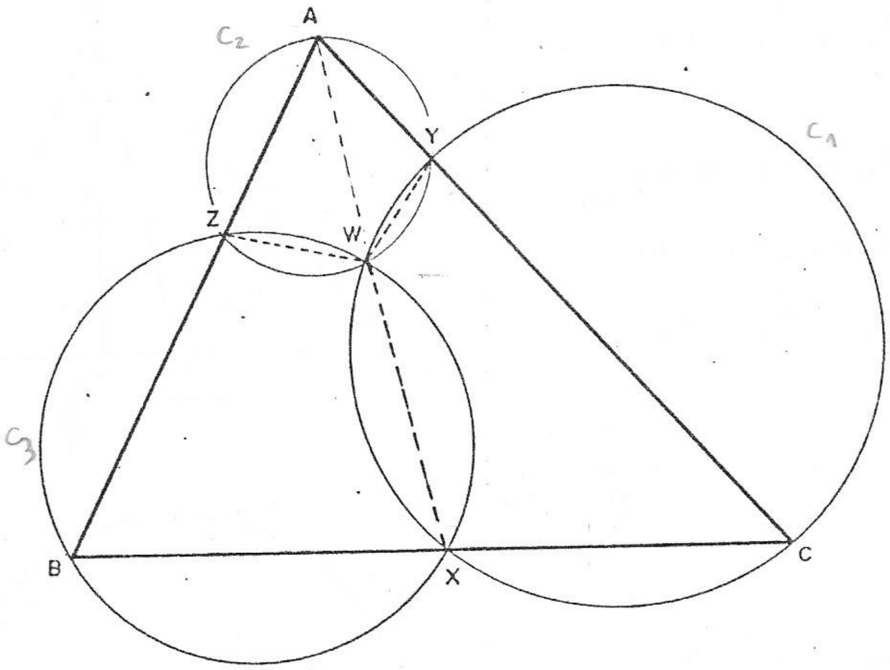
5a. QUESTÃO: Valor: 1,0

Considere um triângulo ABC qualquer e três pontos X, Y e Z, tais que $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$.

Considere os círculos (C_1), (C_2) e (C_3) que passam respectivamente pelos pontos CXY, AYZ e BXZ.

Demonstre que (C_1), (C_2) e (C_3) se encontram em um ponto W.

SOLUÇÃO



Seja P a interseção de (C_1) e (C_3).

Temos: $\begin{cases} X\hat{P}Z = 180^\circ - \hat{B} \\ X\hat{P}Y = 180^\circ - \hat{C} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y\hat{P}Z = 360^\circ - (180^\circ - \hat{B}) - (180^\circ - \hat{C}) = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$$

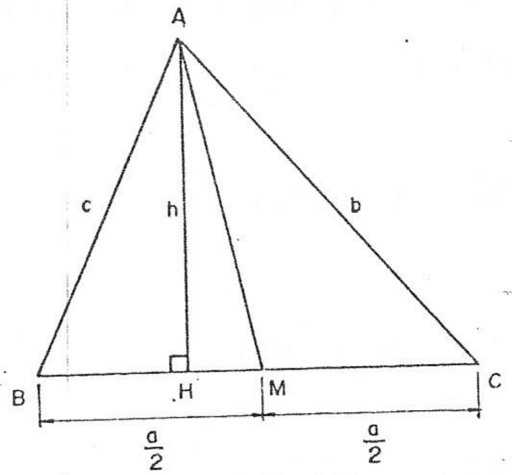
Então, o quadrilátero AYPZ é inscritível $\Rightarrow P \in (C_2)$.

6a. QUESTÃO: Valor: 1,0

1º) Demonstre que a diferença entre os quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao dobro do produto do terceiro lado pela projeção, sobre ele, da mediana correspondente.

2º) Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que cortam dois círculos exteriores, de centros O_1 e O_2 e raios respectivamente iguais a R_1 e R_2, em pontos diametralmente opostos.

SOLUÇÃO

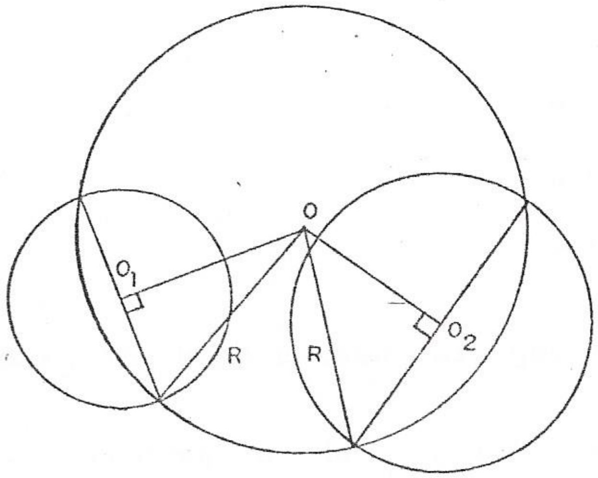


1º) Δ AHC: $b^2 = h^2 + (\frac{a}{2} + MH)^2$

Δ AHB: $c^2 = h^2 + (\frac{a}{2} - MH)^2$

Subtraindo membro a membro:

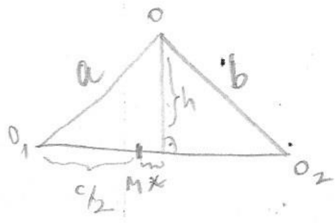
$b^2 - c^2 = 2a.\ MH$



2º) $$\left.\begin{aligned} OO_1^2 &= R^2 - R_1^2 \\ OO_2^2 &= R^2 - R_2^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OO_1^2 - OO_2^2 = R_2^2 - R_1^2.$$

O L.G. de O é uma reta perpendicular a O_1O_2, distante $\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{2\, O_1O_2}$ do seu ponto médio, mais próxima do centro do círculo maior (simétrico do eixo radical dos círculos (O_1) e (O_2) em relação ao ponto médio de $\overline{O_1O_2}$).



Justificativa: $a^2 - b^2 = R^2 - r^2$ (Aplicação do item 1)

$\to h^2 + (\frac{c}{2} + x)^2 = a^2$

$\to h^2 + (\frac{c}{2} - x)^2 = b^2$ $\ominus$

$2cx = a^2 - b^2$

$\to x = \dfrac{R^2 - r^2}{2c}$

7a. QUESTÃO: Valor: 1,0

a) Resolva a equação

$$m \cos x - (m+1) \operatorname{sen} x = m \quad , \quad m \in R$$

b) Determine m de modo que essa equação admita raízes x' e x" cuja diferença seja $\pi/2$

SOLUÇÃO

(a) se $m = 0 \Rightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

se $m \neq 0 \Rightarrow \cos x = 1 + \dfrac{m+1}{m} \operatorname{sen} x$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cancel{1} + \frac{2(m+1)}{m} \operatorname{sen} x + \frac{(m+1)^2}{m^2} \operatorname{sen}^2 x = \cancel{1}$$

$$\Rightarrow (2m^2 + 2m + 1)\operatorname{sen}^2 x + 2m(m+1)\operatorname{sen} x = 0$$

(i) $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

(ii) $\operatorname{sen} x = \dfrac{-2m(m+1)}{2m^2 + 2m + 1} = y \Rightarrow \cos x = \dfrac{-(2m+1)}{2m^2 + 2m + 1}$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \operatorname{arc sen} y$; se $m \leq -1/2$

$x = 2k\pi + \pi - \operatorname{arc sen} y$; se $m > -1/2$

$k \in Z$

b) para que haja raízes tais que $x' - x'' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ uma deve ser do tipo (i) e outra do tipo (ii)

logo $\cos x = 0 \Rightarrow m = -1/2$

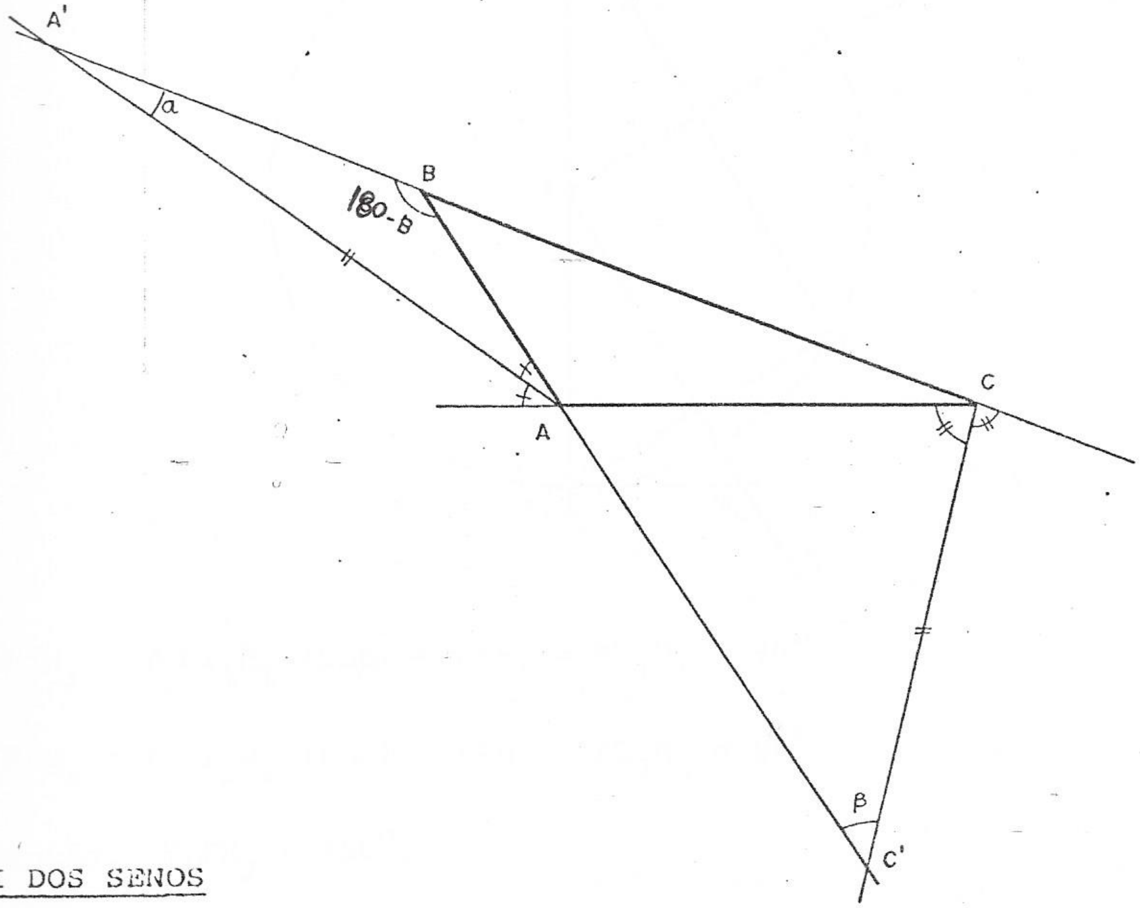
8a. QUESTÃO: Valor: 1,0

Num triângulo ABC ($\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$) traçam-se as bissetrizes externas AA' do ângulo $\hat{A}$, com A' sobre o prolongamento de BC e CC' do ângulo $\hat{C}$, com C' sobre o prolongamento de AB.

SE AA' = CC', mostre que

$$c \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = a \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)$$

SOLUÇÃO



LEI DOS SENOS

$\Delta\, AA'B \Rightarrow \dfrac{AA'}{\operatorname{sen}(180^\circ - \hat{B})} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{\alpha}}$; onde $\alpha = \hat{B} - (90 - \frac{\hat{A}}{2}) = \dfrac{2\hat{B} + \hat{A} - 180^\circ}{2} = \dfrac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$

$\Delta\, CC'B \quad \dfrac{CC'}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\beta}$; onde $\beta = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C} + 90^\circ - \frac{C}{2}) = \dfrac{2\hat{A} - C - 180^\circ}{2} =$

$= \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}$

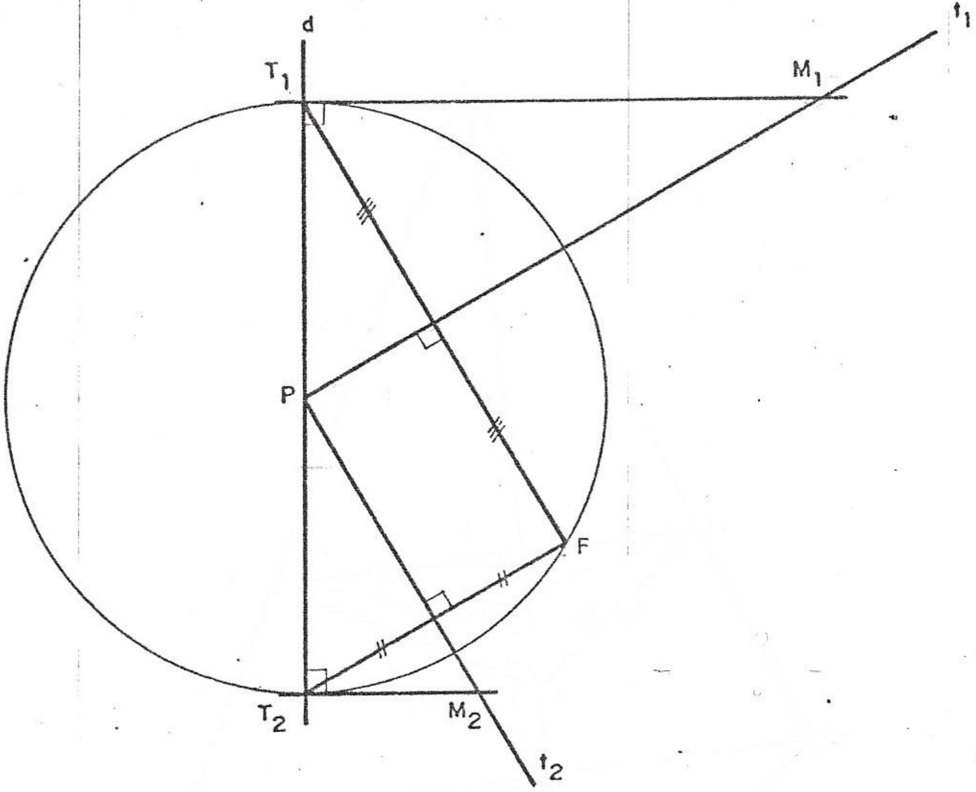
como AA' = CC'
e $\operatorname{sen}(180^\circ - \hat{B}) = \operatorname{sen}\hat{B}$ $\Rightarrow \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{\alpha}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{\beta}}$ $\quad c \operatorname{sen}\beta = a \operatorname{sen}\alpha$

$\Rightarrow c \operatorname{sen}\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = a \operatorname{sen}\dfrac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$

10a. QUESTÃO: Valor: 1,0

Seja uma parábola de foco F e diretriz d. Por um ponto $P \in D$, traçam-se tangentes à parábola que a interceptam em M_1 e M_2. Demonstre que M_1, M_2 e F estão em linha reta.

SOLUÇÃO



$\Delta PFM_1 = \Delta PT_1M_1$ (LLL) $\Rightarrow P\hat{F}M_1 = P\hat{T}_1M_1 = 90^\circ$

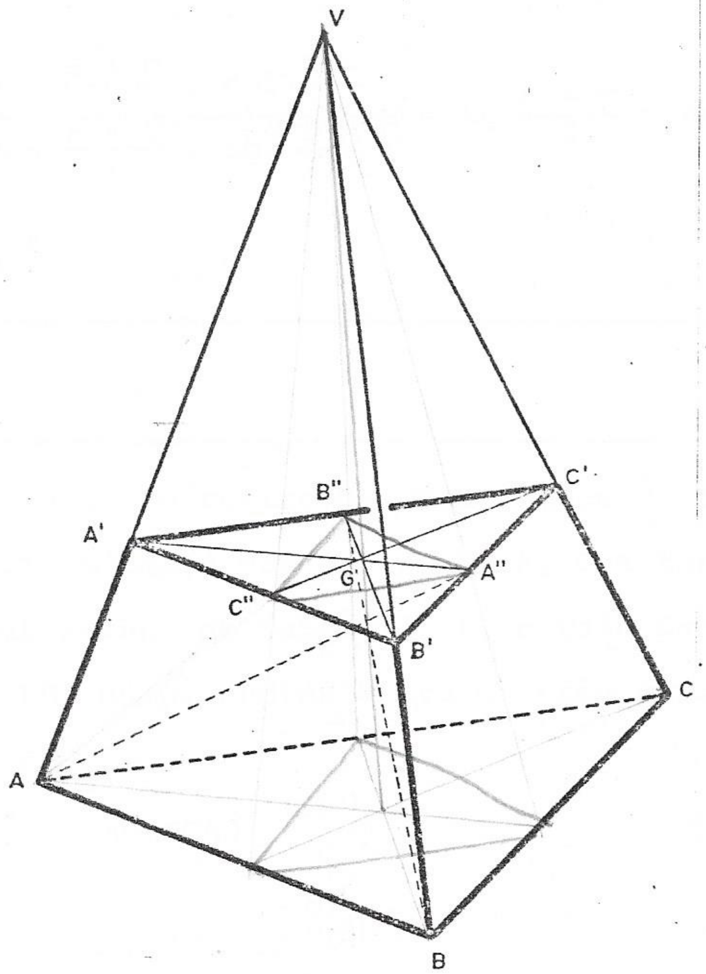
$\Delta PFM_2 = \Delta PT_2M_2$ (LLL) $\Rightarrow P\hat{F}M_2 = P\hat{T}_2M_2 = 90^\circ$

Então, $M_1\hat{F}M_2 = 180^\circ$.

9a. QUESTÃO: Valor: 1,0

Dado um tronco de pirâmide triangular de bases paralelas, demonstre que as retas que ligam os vértices da base inferior aos pontos médios dos lados opostos da base superior são concorrentes.

SOLUÇÃO



AA" ϵ plano VA'A"

BB" ϵ plano VB'B"

CC" ϵ plano VC'C"

AA" e BB" concorrem num ponto da interseção dos planos VA'A" e VB'B" (reta VG).

AA" e CC" concorrem num ponto da interseção dos planos VA'A e VC'C" (reta VG).

Então, AA", BB", CC" concorrem num ponto da reta VG.