IME – GEOMETRIA/TRIGONOMETRIA – 1984/1985

JS, 11/12/84 (pág. 16), 12/12/84 (pág. 16), 14/12/84 (pág. 15), 15/12/84 (pág. 14), 18/12/84 (pág. 16) e 19/12/84 (pág. 15)

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 1

1ª QUESTÃO — VALOR: 0,6

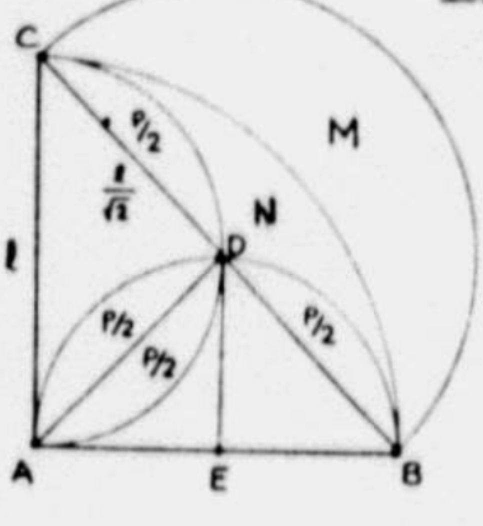
Dá-se um triângulo retângulo isósceles de catetos AB=AC=ℓ. Descreve-se um quarto de círculo (Q) de centro A, ligando os vértices B a C. Com diâmetro BC, descreve-se um semi-círculo (S) exterior ao triângulo e que não contém A. Traçam-se duas semicircunferências de diâmetros AB e AC, (S_B) e (S_C), ambas passando pelo ponto D, meio de BC. Seja M a superfície compreendida entre (Q) e (S). Seja N a superfície compreendida entre (Q) e o arco BD de (S_B) e o arco CD de (S_C). Seja P a superfície limitada pelos arcos AD de (S_C) e AD de (S_B).

Demonstre que:

a) A área M é igual a área do triângulo ADC

b) As áreas de N e P são iguais.

SOLUÇÃO



a) Seja T a área do triângulo.

$$M = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left[\frac{1}{4}\pi\ell^2 - T\right]$$

$$M = \frac{\pi\ell^2}{4} - \frac{\pi\ell^2}{4} + T$$

$$M = T$$

b) $DC = DB = DA$, $\widehat{DC} = \widehat{DB} = \widehat{DA} = 90°$. Os segmentos circulares de bases DA, DB e DC têm área $\frac{P}{2}$.

DEB é semelhante a CAB na razão $\frac{1}{2}$. Logo a razão das áreas dos segmentos de bases DB e CB é $\frac{1}{4}$.

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{4}(N+P)$$

$$2P = N + P \longrightarrow P = N.$$

IME - CEE 94/95	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 3

2ª. QUESTÃO — VALOR: 1,0

Em um triângulo ABC são dados o lado a, a soma dos outros dois lados, $b + c = \ell$, e a área S.

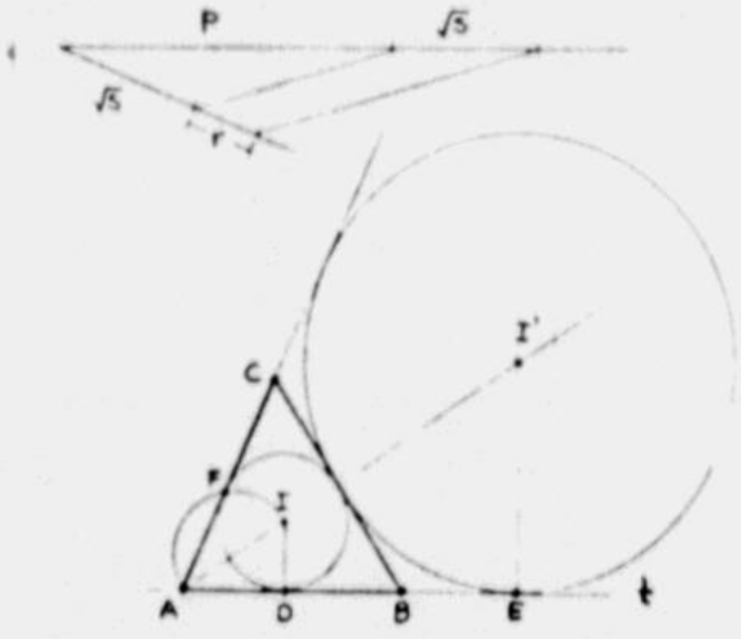
a) Construa o triângulo com régua e compasso.

b) Calcule os ângulos A, B e C e os lados b e c.

SOLUÇÃO

a)

conhecemos p



conhecemos r
porque $S = pr$

IME - CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 4

2a. QUESTÃO (Continuação)

Sobre uma reta t tome um ponto D. Trace $DI = r$, $DI \perp t$. Sobre t tome A tal que $DA = p - a$ e do outro lado marque E tal que $DE = a$. Assim, $AE = p$. Trace a tangente AF. A perpendicular a t em E e a reta AI cortam-se em I', centro do círculo exinscrito que pode ser traçado. B e C são determinados pela tangente comum interna a esses círculos.

OBS Com os dados apresentados os dois círculos parecem ser tangentes.

b) $p = \frac{1}{2}(a + l)$

$p - a = \frac{l - a}{2}$

$r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{l + a}$

$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a} \longrightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{4S}{l^2 - a^2}$

Desta forma, $\hat{A}$ é conhecido.

Temos ainda, $\begin{cases} bc = \frac{2S}{\operatorname{sen} A} \\ b + c = l \end{cases}$

Assim, b e c são as raízes da equação

$$x^2 - lx + \frac{2S}{\operatorname{sen} A} = 0$$

Se $\Delta \geq 0$ o problema tem solução e b e c são conhecidos. Os outros dois ângulos são calculados por

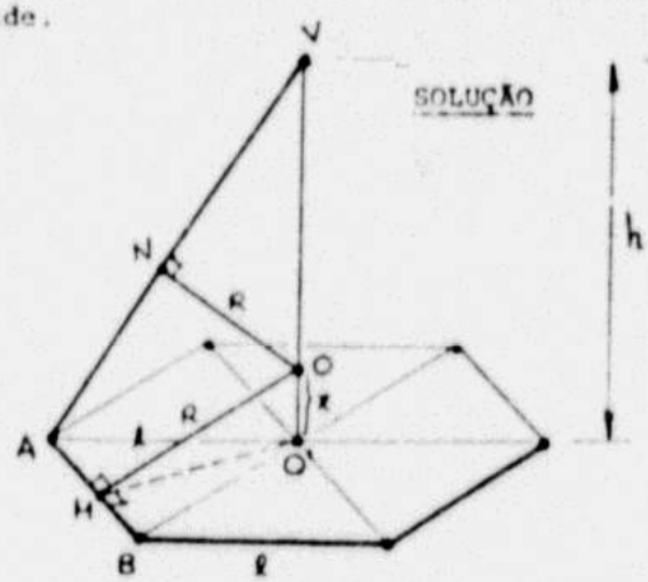
$$\operatorname{sen} B = \frac{2S}{ac} \quad e \quad \operatorname{sen} C = \frac{2S}{ab}$$

OBS A condição de possibilidade é $S \geq \frac{a}{4}\sqrt{l^2 - a^2}$.

3a. QUESTÃO — VALOR 1,0

Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base ABCDEF, de lado da base igual a ℓ e altura h, determine em função de ℓ e h, a posição do centro da esfera que é tangente às doze arestas da pirâmide.

SOLUÇÃO



Seja M médio de AB e ON ⊥ VA

Se ON = OM , O será o centro de uma esfera tangente a todas as arestas

Seja OO' = x

$$\Delta OO'M \rightarrow R^2 = x^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Delta ONV \sim \Delta AO'V \rightarrow \frac{R}{\ell} = \frac{h-x}{\sqrt{\ell^2+h^2}} \quad \text{ou} \quad R^2 = \frac{\ell^2(h-x)^2}{\ell^2+h^2}$$

Igualando,

$$x^2 + \frac{3\ell^2}{4} = \frac{\ell^2(h^2+x^2-2hx)}{\ell^2+h^2}$$

que fornece a equação

$$h^2x^2 + 2\ell^2hx + \frac{3}{4}\ell^4 - \frac{1}{4}\ell^2h^2 = 0$$

A raiz que convém é

$$\boxed{x = \frac{\ell}{2h}\left(\sqrt{\ell^2+h^2} - 2\ell\right)} \qquad (*)$$

OBS Se $h > l\sqrt{3}$, O é interior a pirâmide

Se $h = l\sqrt{3}$, $x = 0$ e $O = O'$

Se $h < l\sqrt{3}$ a fórmula (*) dá um resultado negativo. Neste caso, tome $OO' = |x|$ sendo O exterior a pirâmide.

IME CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 7

4a. QUESTÃO VALOR 1,4

Em um plano π dá-se uma circunferência de centro O e raio r, um ponto fixo A sobre ela e um diâmetro variável BC tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja igual a θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$). Sobre a perpendicular a π em A, marca-se um ponto V tal que AV = 2r. Considere-se o tetraedro ABCV.

a) Calcule em função de r e θ as arestas do tetraedro.

b) Mostre que a soma dos quadrados destas arestas é constante quando θ varia.

c) Qual o lugar geométrico do ponto H de π, pé da altura VH do triângulo VBC?

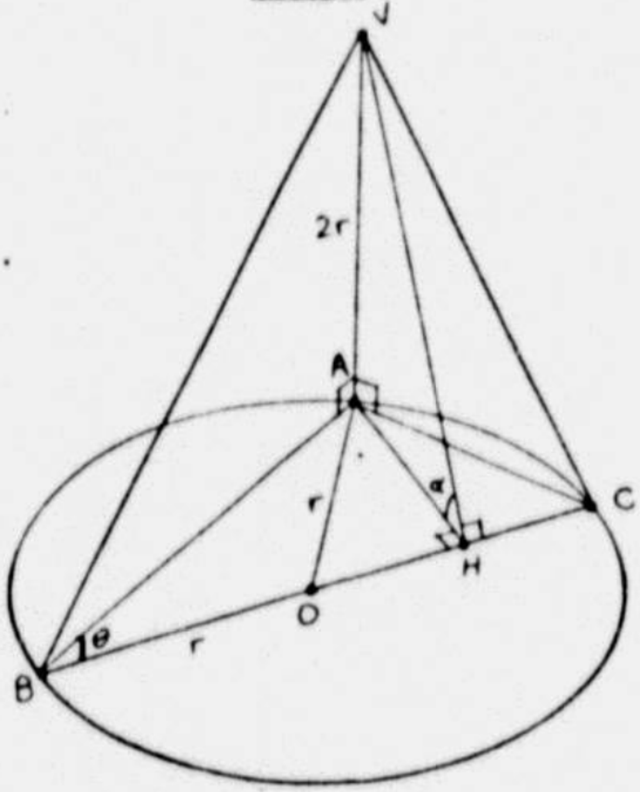
d) Para que posição de BC a área do triângulo VBC é máxima e qual o valor desse máximo?

e) Calcule em função de θ, a tangente α, onde α é igual ao ângulo $V\hat{H}A$.

f) Deduza o valor de θ que corresponde ao mínimo do diedro de aresta BC.

g) Calcule θ para que se tenha tangente α igual a $4/\sqrt{3}$.

SOLUÇÃO



IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 8

4a. QUESTÃO (Continuação)

a) $BC = 2r$

$AV = 2r$

$AB = 2r\cos\theta$

$AC = 2r\,\text{sen}\,\theta$

$VB = 2r\sqrt{1+\cos^2\theta}$

$VC = 2r\sqrt{1+\text{sen}^2\theta}$

b) $\Sigma = 4r^2\left(1 + 1 + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta + 1 + \cos^2\theta + 1 + \text{sen}^2\theta\right) = \boxed{24r^2}$

d) $AV \perp AH$

$AH \perp BC$

$AV \perp pl(ABC)$

$\left.\begin{matrix} AV \perp AH \\ AH \perp BC \\ AV \perp pl(ABC) \end{matrix}\right\} VH \perp BC$, pelo teorema das 3 perpendiculares

$$S_{máx} \rightarrow VH_{máx} \rightarrow AH_{máx} = OA = r$$

$$S_{máx} = \frac{BC \; VH_{máx}}{2} = \frac{2r\sqrt{4r^2+r^2}}{2} = \boxed{r^2\sqrt{5}}$$

c) $A\hat{H}O = 90° \rightarrow$ o LG de H é o círculo de diâmetro OA

e) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2r}{AH} = \frac{2r}{AB \operatorname{sen}\theta} = \frac{2r}{2r\cos\theta \operatorname{sen}\theta} = \frac{2}{\operatorname{sen}2\theta} = \boxed{2\csc 2\theta}$$

f) Para o mínimo de α, $\csc 2\theta = 1$, $2\theta = 90°$, $\boxed{\theta = 45°}$.

g) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$2\csc 2\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{sen}2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\theta = 60° \rightarrow \boxed{\theta = 30°} \quad \text{ou}$$

$$2\theta = 120° \rightarrow \boxed{\theta = 60°}$$

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 10
5a. QUESTÃO			VALOR 1,0

Dá-se um plano π e dois pontos A e B não pertencentes a π, situados em um mesmo semi-espaço de π, sendo:

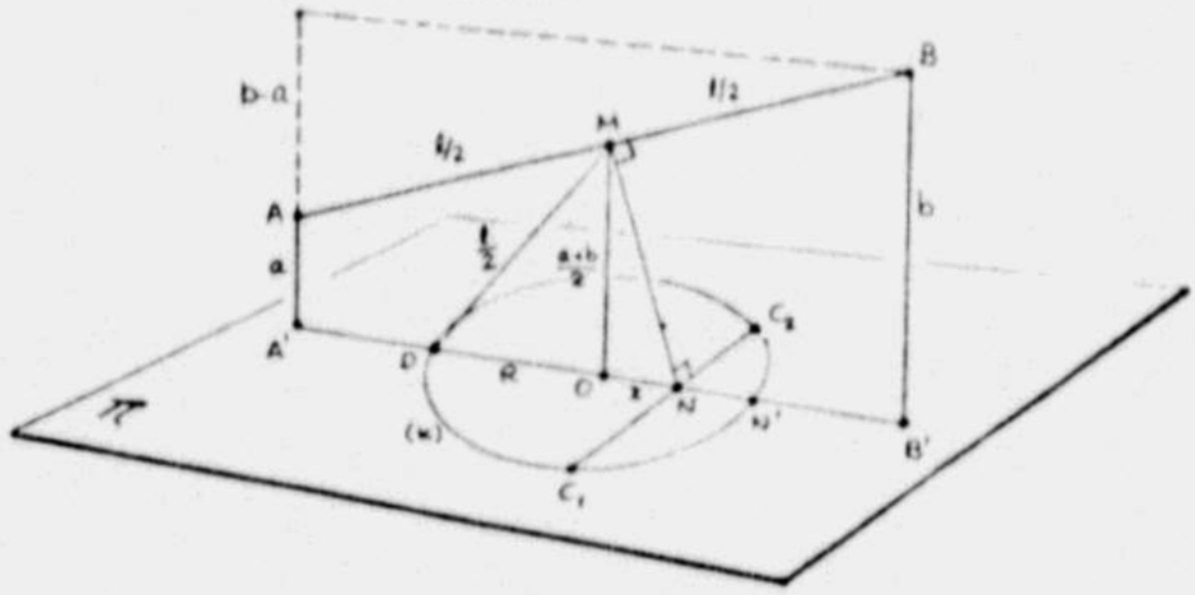
i) $AB = \ell$;

ii) a e b as cotas de A e B em relação a π;

iii) $a < b$.

Determine um triângulo ABC isósceles, retângulo em C, tal que o vértice C pertença ao plano π. Discuta a possibilidade da existência desse triângulo e o número de soluções.

SOLUÇÃO



a) Se $A\hat{C}B = 90°$, C pertence a uma esfera de diâmetro AB, que deve interceptar π. Logo $OM < \frac{l}{2} \rightarrow \frac{a+b}{2} < \frac{l}{2}$ e

$$l > a+b \qquad (1)$$

<u>OBS</u> Descartamos a hipótese $l = a+b$ pois neste caso o problema só teria solução se $a = b$ o que contraria iii).

b) Seja (K) a interseção da esfera de diâmetro AB com π. Sabemos que $C \in (K)$

Se $CA = CB$, C pertence ao plano (P) mediador de AB

Logo C é a interseção de (K) e (P)

Seja R o raio de (K) e seja $OH = x$ (v figura)

se $x < R$ existem 2 soluções para o problema e

se $x = R$, apenas uma

Completando o retângulo A'B'BA", pela semelhança de HON e BAA",

$$\frac{x}{\frac{a+b}{2}} = \frac{b-a}{\sqrt{\ell^2-(b-a)^2}} \quad \text{ou}$$

$$x = \frac{b^2-a^2}{2\sqrt{\ell^2-(b-a)^2}}$$

No triângulo HOD,

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2-(b+a)^2}$$

Para que $(K) \cap (P)$ não seja vazia, temos $x \leq R$, ou

$$\frac{b^2-a^2}{2\sqrt{\ell^2-(b-a)^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2-(b+a)^2}$$

Desenvolvendo, encontramos $\ell \geq \sqrt{2a^2+2b^2}$ (2)

Ora, se $\ell^2 \geq 2a^2+2b^2$, $\ell^2 \geq (a+b)^2+(b-a)^2$,

que implica em $\ell > a+b$ e a condição (1) está satisfeita. Assim o problema terá

2 soluções se $\ell > \sqrt{2a^2+2b^2}$.

1 solução se $\ell = \sqrt{2a^2+2b^2}$ e

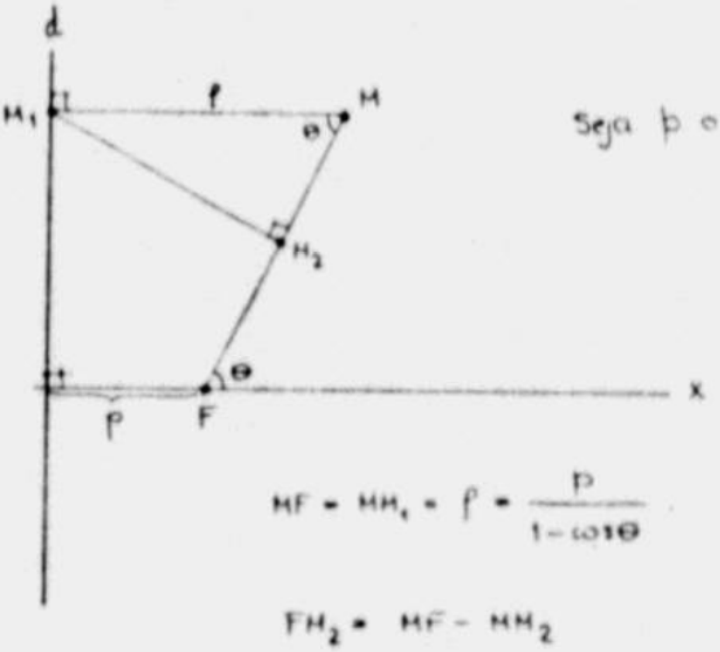
nenhuma solução se $\ell < \sqrt{2a^2+2b^2}$

IME - CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 12

6a. QUESTÃO ITEM A) VALOR: 0,5

Dá-se (P) uma parábola de foco F e diretriz d. Sejam M um ponto qualquer de (P); M_1 sua projeção sobre d; M_2 a projeção de M_1 sobre FM. Identifique o lugar geométrico de M_2 quando M descreve a parábola (P).

SOLUÇÃO



Seja p o parâmetro.

$$MF = MM_1 = \rho = \frac{p}{1-\cos\theta}$$

$$FM_2 = MF - MM_2$$

$$= \rho - \rho\cos\theta$$

$$= \rho(1-\cos\theta)$$

$$= \frac{p}{1-\cos\theta}(1-\cos\theta)$$

$$= p.$$

O LG de M_2 é um círculo de centro F e raio p

IME - CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 13

6a. QUESTÃO ITEM B) VALOR: 0,5

Em uma hipérbole (H) são dados um foco F e a diretriz correspondente d, que distam entre sí 5cm. A direção de uma assíntota forma um ângulo de 30° com o eixo focal. Pede-se calcular os valores dos semi-eixos de (H).

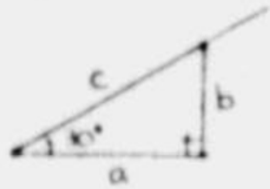
SOLUÇÃO

$$c - \frac{a}{e} = 5$$

$$c - \frac{a}{\frac{c}{a}} = 5$$

$$c - \frac{a^2}{c} = 5$$

$$c^2 - a^2 = 5c$$



$b^2 = 5c$ Mas, $c = 2b$ Daí,

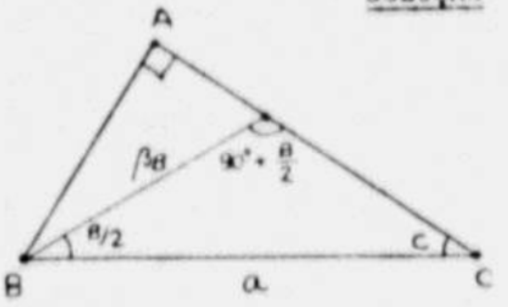
$$b^2 = 5 \cdot 2b \rightarrow \boxed{b = 10}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{3} \rightarrow \boxed{a = 10\sqrt{3}}$$

7a. QUESTÃO VALOR 0,8

Em um triângulo ABC retângulo em A, é dada a razão k entre o produto das bissetrizes internas dos ângulos B e C e o quadrado da hipotenusa. Calcule o ângulo B, em função de k. Determine entre que valores pode variar a razão k para que o problema tenha solução.

SOLUÇÃO



$$\frac{\beta_B \, \beta_C}{a^2} = k$$

$$\frac{\beta_B}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\cos\frac{B}{2}} \rightarrow \frac{\beta_B}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{\cos\frac{B}{2}} .$$

Analogamente, $$\frac{\beta_C}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\cos\frac{C}{2}} .$$

Multiplicando, $$\frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}} = k$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} \cdot 2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}} = k$$

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{C}{2} = \frac{k}{4}$$

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(45° - \frac{B}{2}\right) = \frac{k}{4}$$

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\right) = \frac{k}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{B}{2}\right) = \frac{k}{4}$$

$$\sqrt{2}\left(2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}\right) = k$$

7a. QUESTÃO (Continuação)

$$\operatorname{sen} B - (1 - \cos B) = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} B + \cos B = \frac{k}{\sqrt{2}} + 1 \qquad \text{Quadrando,}$$

$$1 + 2 \operatorname{sen} B \cos B = \frac{k^2}{2} + \frac{2k}{\sqrt{2}} + 1$$

$$\operatorname{sen} 2B = \frac{k^2}{2} + k\sqrt{2}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{k^2}{2} + k\sqrt{2} \right), \quad \text{ou } B' = 90^\circ - B}$$

É claro que $k > 0$

Porém devemos ter $\frac{k^2}{2} + \sqrt{2}k \leq 1$, ou seja

$$\frac{k^2}{2} + \sqrt{2}k - 1 \leq 0$$

o que dá $-2-\sqrt{2} \leq k \leq 2-\sqrt{2}$

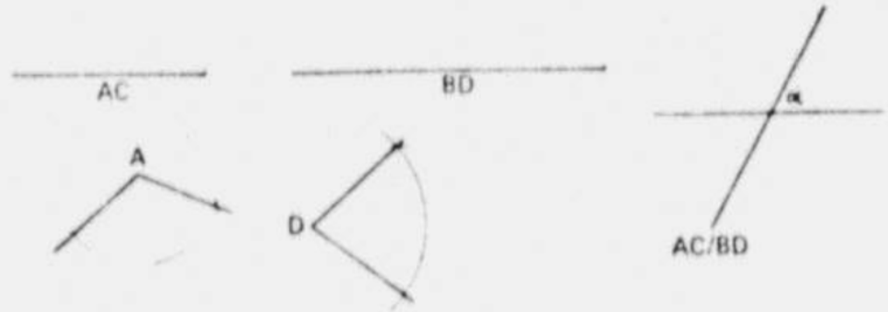
Portanto para que o problema tenha solução,

$$\boxed{0 < k \leq 2-\sqrt{2}}$$

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 15

8a. QUESTÃO ITEM A) VALOR: 0,5

Construa um quadrilátero convexo ABCD, dados: os comprimentos das diagonais AC e BD; o ângulo de AC com BD; os ângulos adjacentes A e D.



SOLUÇÃO

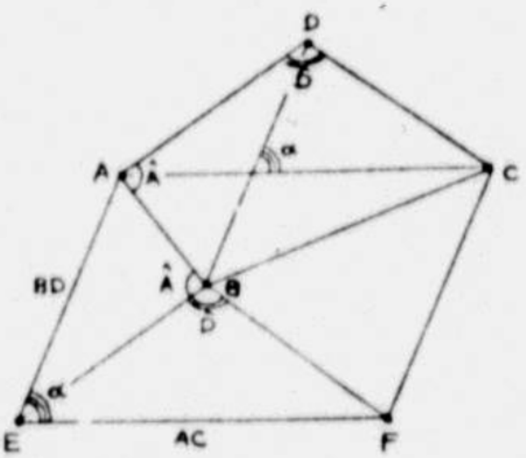
Justificativa:

A translação do ΔACD de vetor $\overline{DB}$ forma os paralelogramos ADBE, DBFC e AEFC.

Construímos AEFC.

O arco capaz de $\hat{A}$ sobre AE e o arco capaz de $\hat{D}$ sobre EF determinam B.

Como AD // EB e CD // FB, D está determinado.

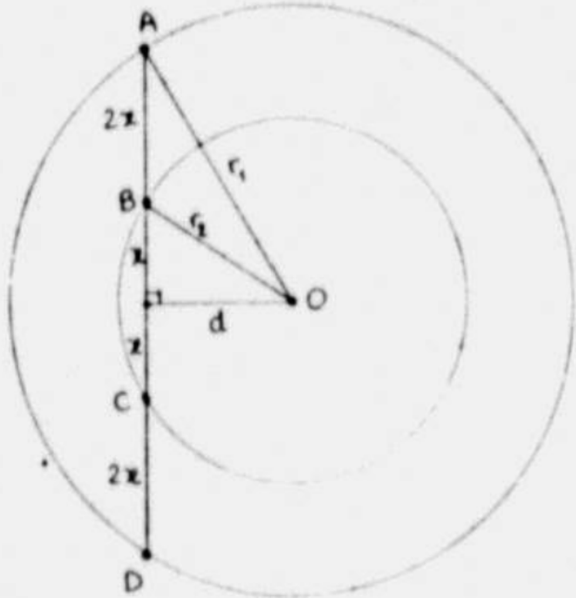


IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 17

8a. QUESTÃO: ITEM B) VALOR: 0,5

São dados dois círculos concêntricos (C_1) e (C_2) de raios r_1 e r_2 $(r_1 > r_2)$ e centro O. Por um ponto A de (C_1) determine uma corda AD de (C_1), que corta (C_2) em B e C, tal que AD = 3BC. Discuta a possibilidade e o número de soluções.

SOLUÇÃO



Sejam

AB = BC = CD = 2x

$$r_1^2 = d^2 + 9x^2$$

$$r_2^2 = d^2 + x^2$$

$$r_1^2 = d^2 + 9(r_2^2 - d^2)$$

$$r_1^2 = d^2 + 9r_2^2 - 9d^2$$

$$8d^2 = 9r_2^2 - r_1^2$$

$$d = \frac{\sqrt{9r_2^2 - r_1^2}}{2\sqrt{2}} \quad (*)$$

O problema fica resolvido traçando-se por A tangentes ao círculo de centro O e raio d, dado por (*)

Se $r_1 > 3r_2$, não há solução

Se $r_1 = 3r_2$, há uma única solução determinada pela reta AO.

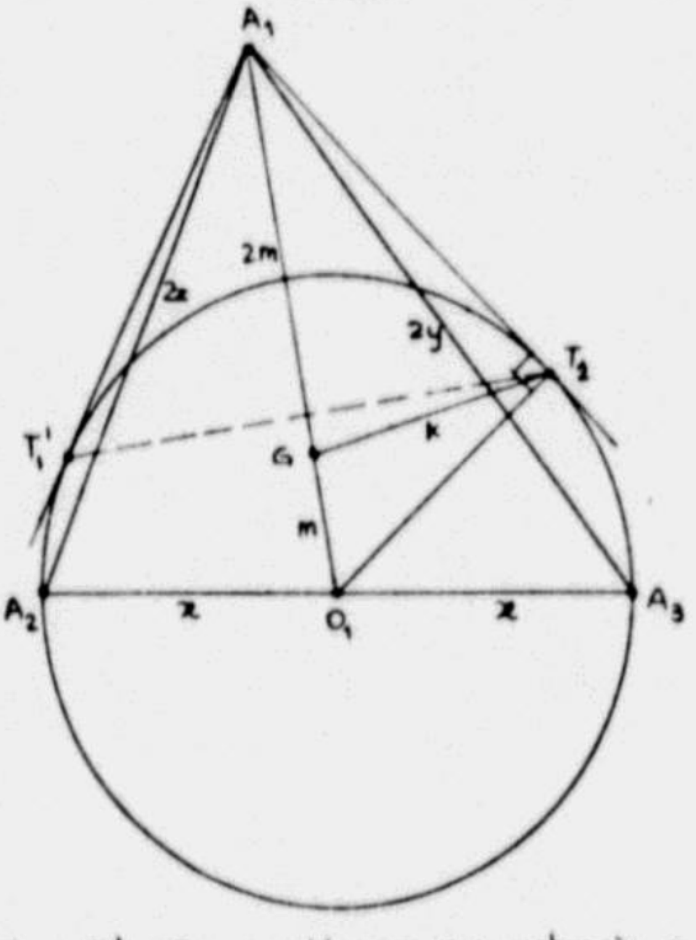
Se $r_1 < 3r_2$, há 2 soluções simétricas em relação a AO.

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 18

9ª. QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja o triângulo acutângulo $A_1 A_2 A_3$. Traça-se um círculo de diâmetro $A_2 A_3$ e de A_1 traçam-se tangentes a ele, com pontos de contato T_1 e T'_1. Analogamente procede-se com os lados $A_3 A_1$ e $A_1 A_2$, obtendo-se os pontos de contato T_2, T'_2 e T_3, T'_3. Mostre que os seis pontos de contato obtidos pertencem a um círculo de centro G (baricentro de $A_1 A_2 A_3$).

SOLUÇÃO



T_1 e T_1' são simétricos em relação a A_1O_1. Logo,

$GT_1 = GT_1' = k$.

Sejam, $A_2A_3 = 2x$, $A_1A_3 = 2y$, $A_1A_2 = 2z$ e $A_1O_1 = 3m$.

Daí, se G é baricentro, $GO_1 = m$.

9a. QUESTÃO (Continuação)

$$A_1O_1 = 3m = \frac{1}{2}\sqrt{2(4y^2+4z^2)-4x^2} = \sqrt{2(y^2+z^2)-x^2}$$

$$AT_1^2 = AO_1^2 - x^2 = 2(y^2+z^2) - 2x^2 = 2(-x^2+y^2+z^2)$$

A relação de Stewart no triângulo AO_1T_1 dá:

$$2(-x^2+y^2+z^2)m + x^2 . 2m = k^2 . 3m + m\ 2m\ 3m$$

$$-2x^2+2y^2+2z^2+2x^2 = 3k^2 + 6\ \frac{1}{9}(2y^2+2z^2-x^2)$$

$$\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}y^2+\frac{2}{3}z^2 = 3k^2 \quad \text{ou}$$

$$k = \frac{1}{3}\sqrt{2x^2+2y^2+2z^2}$$

Ora, este resultado não depende da escolha do círculo, logo G é equidistante dos pontos T_1, T_1', T_2, T_2', T_3 e T_3'.

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 20

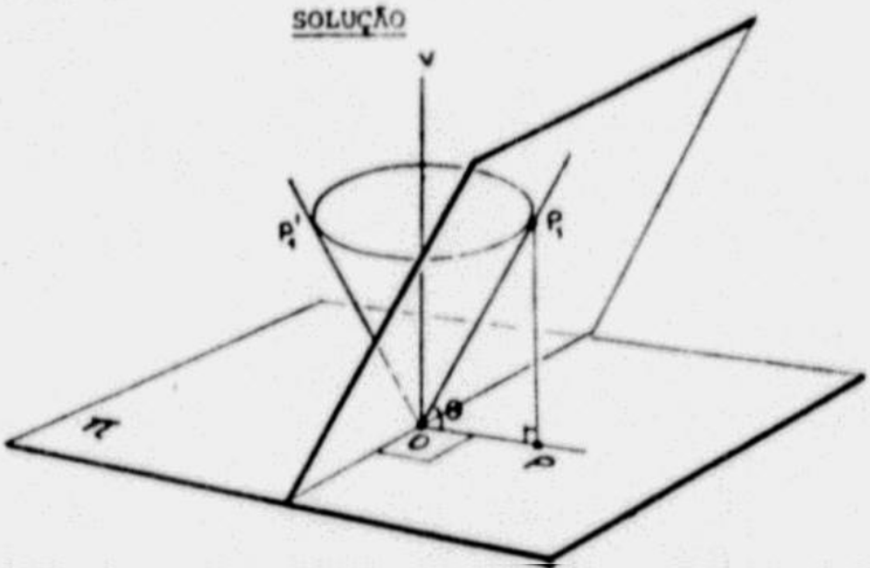
10a. QUESTÃO VALOR: 1,2

Dá-se um plano horizontal π, um de seus pontos O e a vertical em O, OV. A cada ponto P de π faz-se corresponder um ponto P_1 sobre a vertical em P, tal que $\frac{PP_1}{OP} = k$ (constante). Com essa correspondência, π transforma-se em uma superfície (S).

a) Deduza a natureza de (S), as seções de (S) por planos passando por OV e as seções de (S) por planos perpendiculares a OV; identifique o plano tangente a (S) em um ponto qualquer P_1.

b) De um ponto Q fixo sobre OV tal que OQ = h, traça-se uma perpendicular sobre OP_1; considere-se a esfera (E) de centro Q e raio QN (N é o pé da perpendicular sobre OP_1). Determine a curva comum a (E) e a (S) e calcule o volume compreendido entre (E) e (S).

SOLUÇÃO



a) $\text{tg}\,\theta = k$. (S) é uma superfície cônica de vértice O e eixo OV.

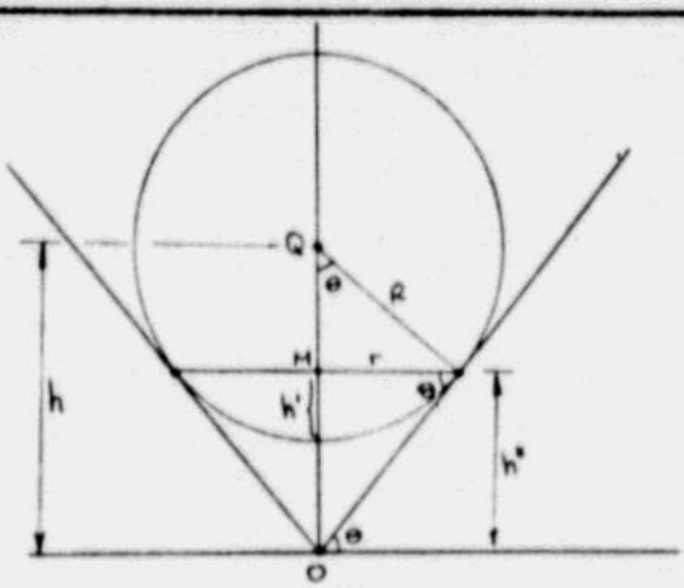
Um plano que contém OV corta (S) segundo duas semi-retas, simétricas em relação a OV.

As seções perpendiculares a OV são círculos.

O plano tangente a (S) em P_1 é o plano que contém a geratriz OP_1 e é perpendicular ao plano (VOP) (v desenho).

10a. QUESTÃO (Continuação)

b)



$$tg\,\theta = k \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \quad , \quad sen\,\theta = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$R = h\cos\theta \rightarrow R = \frac{h}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$r = R\,sen\,\theta \rightarrow r = \frac{hk}{1+k^2}$$

$$h'' = h - R\cos\theta \rightarrow h'' = \frac{hk^2}{1+k^2}$$

$$h' = R - R\cos\theta \rightarrow h' = \frac{h}{1+k^2}\left(\sqrt{1+k^2} - 1\right)$$

A curva comum entre (E) e (S) é um círculo de M e raio r. OM e r estão dados acima.

O volume entre (E) e (S) é a diferença entre os volumes de um cone (de raio r e altura h") e de um segmento esférico de uma base (de raio r e altura h')

10a. QUESTÃO (Continuação)

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h'' - \frac{\pi h'}{6}\left(3r^2 + h'^2\right)$$

$$V = \frac{\pi}{6}\left(2r^2h'' - 3r^2h' - h'^3\right)$$

$$V = \frac{\pi}{6}\left[2\,\frac{h^2k^2}{(1+k^2)^2}\cdot\frac{hk^2}{(1+k^2)} - 3\,\frac{h^2k^2}{(1+k^2)^2}\cdot\frac{h}{(1+k)}\left(\sqrt{1+k^2}-1\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{h^3}{(1+k^2)^3}\left((1+k^2)\sqrt{1+k^2} - 3(1+k^2) + 3\sqrt{1+k^2} - 1\right)\right]$$

$$V = \frac{\pi h^3}{6(1+k^2)^3}\left[2k^4 - 3k^2\sqrt{1+k^2} + 3k^2 - \sqrt{1+k^2} - k^2\sqrt{1+k^2} + 3 + 3k^2 - 3\sqrt{1+k^2} + 1\right]$$

$$V = \frac{\pi h^3}{6(1+k^2)^3}\left[2k^4 + 6k^2 + 4 - 4k^2\sqrt{1+k^2} - 4\sqrt{1+k^2}\right]$$

$$V = \frac{\pi h^3}{3(1+k^2)^3}\left[k^4 + 3k^2 + 2 - 2\sqrt{1+k^2}\,(k^2+1)\right]$$

$$V = \frac{\pi h^3}{3(1+k^2)^3}\left[(k^2+2)(k^2+1) - 2\sqrt{1+k^2}\,(k^2+1)\right]$$

$$\boxed{V = \frac{\pi h^3}{3(1+k^2)^2}\left[k^2 + 2 - 2\sqrt{1+k^2}\right]}$$