MINISTÉRIO DO EXÉRCITO
EME — CTEx
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

1.º ANO

1984/1985

MINISTÉRIO DO EXÉRCITO
E M E — C T Ex
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

COMISSÃO DE EXAME DE ESCOLARIDADE
1984/85

INSTRUÇÕES PARA REALIZAÇÃO DA PROVA DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

1. NÃO ASSINE A PROVA.
2. Utilize a caneta esferográfica fornecida pelo Grupo de Aplicação e Fiscalização. As figuras julgadas necessárias deverão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores.
3. O espaço destinado à solução de cada questão é suficiente. Portanto, não será considerada resolução fora do local especificamente designado.
4. Não será fornecido material suplementar. A prova fornecida contém 5 (cinco) folhas de papel para rascunho, o qual poderá ser feito também no verso das folhas de questões. Note-se, no entanto, que o rascunho não será levado em conta, para efeito de correção.
5. A interpretação das questões faz parte da resolução. São vedadas perguntas ao Grupo de Aplicação e Fiscalização.
6. A prova está sob a forma de caderno. Não é permitido destacar suas folhas. Ao entregar a prova devolva todo o material recebido.
7. Esta prova contém, além da capa e da presente folha de instruções, 22 (vinte e duas) folhas numeradas de 1 (um) a 22 (vinte e dois).
8. O tempo para solução desta prova é 4 (quatro) horas.
9. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Seja sucinto, evitando divagações.

B O A   S O R T E

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 1

1ª QUESTÃO: VALOR: 0,6

Dá-se um triângulo retângulo isósceles de catetos $AB=AC=\ell$. Descreve-se um quarto de círculo (Q) de centro A, ligando os vértices B a C. Com diâmetro BC, descreve-se um semi-círculo (S) exterior ao triângulo e que não contém A. Traçam-se duas semicircunferências de diâmetros AB e AC, (S_B) e (S_C), ambas passando pelo ponto D, meio de BC. Seja M a superfície compreendida entre (Q) e (S). Seja N a superfície compreendida entre (Q) e o arco BD de (S_B) e o arco CD de (S_C). Seja P a superfície limitada pelos arcos AD de (S_C) e AD de (S_B).

Demonstre que:

a) A área M é igual a área do triângulo ABC

b) As áreas de N e P são iguais.

SOLUÇÃO

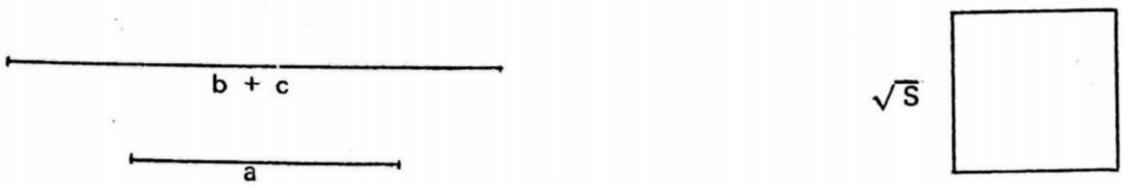
IME – CEE 84/85 | GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA | FOLHA 3

2a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Em um triângulo ABC são dados o lado a, a soma dos outros dois lados, $b + c = \ell$, e a área S.

a) Construa o triângulo com régua e compasso.

b) Calcule os ângulos A, B e C e os lados b e c.

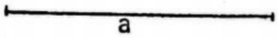


SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 5
3a. QUESTÃO:			VALOR: 1,0

Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base ABCDEF, de lado da base igual a ℓ e altura h, determine em função de ℓ e h, a posição do centro da esfera que é tangente às doze arestas da pirâmide.

SOLUÇÃO



SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 7

4a. QUESTÃO: VALOR: 1,4

Em um plano π dá-se uma circunferência de centro O e raio r, um ponto fixo A sobre ela e um diâmetro variável BC tal que o ângulo $\widehat{ABC}$ seja igual a Θ ($0 \leqslant \Theta \leqslant \pi/2$). Sobre a perpendicular a π em A, marca-se um ponto V tal que AV = 2r. Considere-se o tetraedro ABCV.

a) Calcule em função de r e Θ as arestas do tetraedro.

b) Mostre que a soma dos quadrados destas arestas é constante quando Θ varia.

c) Qual o lugar geométrico do ponto H de π, pé da altura VH do triângulo VBC?

d) Para que posição de BC a área do triângulo VBC é máxima e qual o valor desse máximo?

e) Calcule em função de Θ, a tangente α, onde α é igual ao ângulo $\widehat{VHA}$.

f) Deduza o valor de Θ que corresponde ao mínimo do diedro de aresta BC.

g) Calcule Θ para que se tenha tangente α igual a $4/\sqrt{3}$.

SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 10
5a. QUESTÃO:			VALOR: 1,0

Dá-se um plano π e dois pontos A e B não pertencentes a π, situados em um mesmo semi-espaço de π, sendo:

i) $AB = \ell$;

ii) a e b as cotas de A e B em relação a π;

iii) $a < b$.

Determine um triângulo ABC isósceles, retângulo em C, tal que o vértice C pertença ao plano π. Discuta a possibilidade da existência desse triângulo e o número de soluções.

SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 12

6a. QUESTÃO: ITEM A) VALOR: 0,5

Dá-se (P) uma parábola de foco F e diretriz d. Sejam M um ponto qualquer de (P); M_1 sua projeção sobre d; M_2 a projeção de M_1 sobre FM. Identifique o lugar geométrico de M_2 quando M descreve a parábola (P).

SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 13
6a. QUESTÃO: ITEM B)			VALOR: 0,5

Em uma hipérbole (H) são dados um foco F e a diretriz correspondente d, que distam entre sí 5cm. A direção de uma assíntota forma um ângulo de 30° com o eixo focal. Pede-se calcular os valores dos semi-eixos de (H).

SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 14
7a. QUESTÃO:			VALOR: 0,8

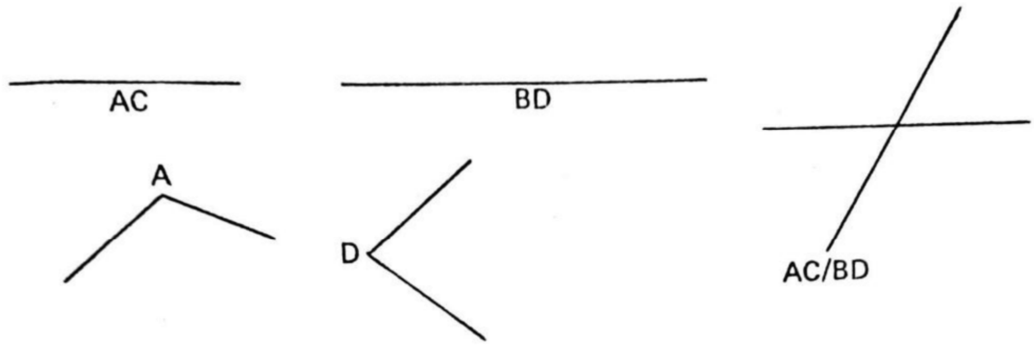
Em um triângulo ABC retângulo em A, é dada a razão k entre o produto das bissetrizes internas dos ângulos B e C e o quadrado da hipotenusa. Calcule o ângulo B, em função de k. Determine entre que valores pode variar a razão k para que o problema tenha solução.

SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 16

8a. QUESTÃO: ITEM A) VALOR: 0,5

Construa um quadrilátero convexo ABCD, dados: os comprimentos das diagonais AC e BD; o ângulo de AC com BD; os ângulos adjacentes A e D.



SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 17
8a. QUESTÃO: ITEM B)			VALOR: 0,5

São dados dois círculos concêntricos (C_1) e (C_2) de raios r_1 e r_2 $(r_1 > r_2)$ e centro O. Por um ponto A de (C_1) determine uma corda AD de (C_1), que corta (C_2) em B e C, tal que AD = 3BC. Discuta a possibilidade e o número de soluções.

SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 18

9a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja o triângulo acutângulo $A_1 A_2 A_3$. Traça-se um círculo de diâmetro $A_2 A_3$ e de A_1 traçam-se tangentes a ele, com pontos de contato T_1 e T'_1. Analogamente procede-se com os lados $A_3 A_1$ e $A_1 A_2$, obtendo-se os pontos de contato T_2, T'_2 e T_3, T'_3. Mostre que os seis pontos de contato obtidos pertencem a um círculo de centro G (baricentro de $A_1 A_2 A_3$).

SOLUÇÃO

IME – CEE 84/85	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 20

10a. QUESTÃO: VALOR: 1,2

Dá-se um plano horizontal π, um de seus pontos O e a vertical em O, OV. A cada ponto P de π faz-se corresponder um ponto P_1 sobre a vertical em P, tal que $\frac{PP_1}{OP} = k$ (constante). Com essa correspondência, π transforma-se em uma superfície (S).

a) Deduza a natureza de (S), as seções de (S) por planos passando por OV e as seções de (S) por planos perpendiculares a OV; identifique o plano tangente a (S) em um ponto qualquer P_1.

b) De um ponto Q fixo sobre OV tal que OQ = h, traça-se uma perpendicular sobre OP_1: considere-se a esfera (E) de centro Q e raio QN (N é o pé da perpendicular sobre OP_1). Determine a curva comum a (E) e a (S) e calcule o volume compreendido entre (E) e (S).

SOLUÇÃO