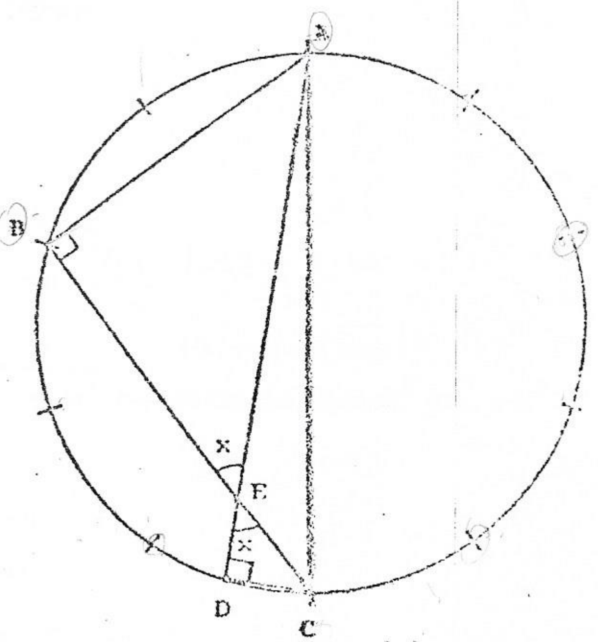
1a. QUESTÃO — ITEM 1 — VALOR : 1,0

Mostre que o lado do icoságono regular convexo é igual à diferença, dividida por $\sqrt{2}$, entre o lado do decágono regular estrelado e o lado do pentágono regular convexo. Todos os três polígonos estão inscritos em um mesmo círculo de raio r.

SOLUÇÃO



1ª SOLUÇÃO

$AB = \ell_5 \implies \widehat{AB} = 72^\circ$

$BC = \ell^*_{10} \implies \widehat{BC} = 108^\circ$

$CD = \ell_{20} \implies \widehat{CD} = 18^\circ$

Então, AC é diâmetro $\implies$

$\implies A\hat{B}C = A\hat{D}C = 90^\circ$

x é ângulo excêntrico interno $\implies$

$\implies \hat{x} = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \dfrac{72^\circ + 18^\circ}{2} = 45^\circ$

Os triângulos ABE e CDE são retângulos isósceles.

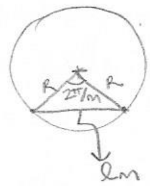
$\triangle ABE \implies BE = AB = \ell_5 \implies$

$\implies CE = BC - BE = \ell^*_{10} - \ell_5$

$\triangle CDE \implies CD = \dfrac{CE}{\sqrt{2}} \implies$

$$\implies \boxed{\ell_{20} = \frac{\ell^*_{10} - \ell_5}{\sqrt{2}}}$$

Estrelados pares → 3×3
" ímpares → 2×2



$\operatorname{sen}\frac{\pi}{m} = \frac{\ell_m}{2}\cdot\frac{1}{R}$

ℓ_m ① → $\ell_m = 2R \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}$

② → ℓ^*_m, m par → $2R \operatorname{sen}\frac{3\pi}{m}$

③ → ℓ^*_m, m ímpar → $2R \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}$

2ª SOLUÇÃO

$\ell_5 = 2r \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$; $\quad \ell^*_{10} = 2r \operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}$; $\quad \ell_{20} = 2r \operatorname{sen}\frac{\pi}{20}$.

Quer-se provar que $\ell_{20} = \dfrac{\ell^*_{10} - \ell_5}{\sqrt{2}}$ ou seja: $\dfrac{\ell^*_{10} - \ell_5}{\ell_{20}} = \sqrt{2}$.

Logo:

$$\frac{\ell^*_{10} - \ell_5}{\ell_{20}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10} - \operatorname{sen}\overset{2\pi/10}{\frac{\pi}{5}}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{20}} = \frac{2\,\cancel{\operatorname{sen}\frac{\pi}{20}}\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{\cancel{\operatorname{sen}\frac{\pi}{20}}} = \sqrt{2}.$$

2ª QUESTÃO — ITEM 2 — VALOR : 1,0

Dada a equação $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - m\,\text{sen}^2 x = 0,$

Determinar a condição a que deve satisfazer m para que ela tenha menos uma solução x_0, tal que $0 < x_0 < 2\pi$.

SOLUÇÃO

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \text{sen}\,2x \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\cos 2x - \text{sen}\,2x}{2}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow m\,\text{sen}^2 x = \frac{m - m\cos 2x}{2}$$

logo

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - m\,\text{sen}^2 x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \text{sen}\,2x - m + m\cos 2x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} + m)\cos 2x - \text{sen}\,2x = m \quad \rightarrow \quad \underbrace{(\sqrt{3}+m)}_{a}\cos \underbrace{2x}_{\alpha} - \underbrace{1}_{b} \cdot \text{sen}\underbrace{2x}_{\alpha} = m$$

$$|a\cos\alpha + b\,\text{sen}\,\alpha| \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\cos\alpha + b\,\text{sen}\,\alpha \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Longrightarrow (a\cos\alpha + b\,\text{sen}\,\alpha)^2 \leq a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow m^2 \leq (\sqrt{3} + m)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \cancel{m^2} \leq 3 + 2\sqrt{3}\,m + \cancel{m^2} + 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}\,m \geq -4$$

$$\Rightarrow m \geq -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \qquad m \geq \frac{-4}{2\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3ª QUESTÃO — ITEM 3 — VALOR : 1,0

Consideram-se todos os pares de pontos do espaço M, M', tais que o ângulo $M\hat{O}M' = 90°$, sendo O um ponto fixo dado.

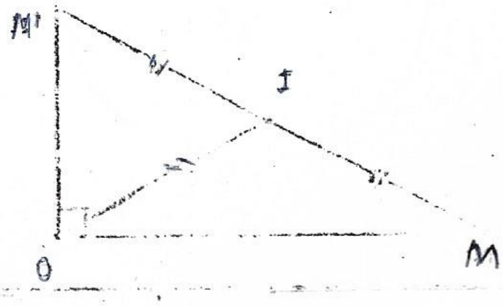
(Valor: 0,5) a) Qual o lugar geométrico de M', sendo M e M' variáveis porém fixo o ponto médio I, de MM'?

(Valor: 0,5) b) Considere outro ponto fixo O', tal que também $M\hat{O'}M' = 90°$. O ponto M sendo fixo, obtenha o lugar geométrico de M'.

SOLUÇÃO

$IM = IM' = IO \Longrightarrow$

O L.G. de M e M' é a superfície esférica de centro I e raio IO.



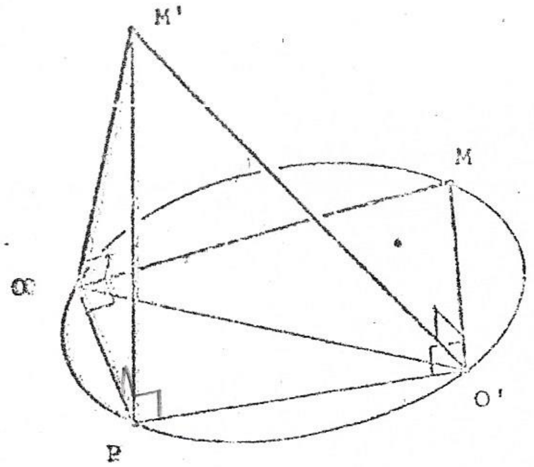
Sendo P a projeção ortogonal de M' sobre o plano MOO', pelo teorema da projetividade do ângulo reto, temos que:

$M'\hat{O}M = 90^\circ \Longrightarrow P\hat{O}M = 90^\circ$

$M'\hat{O}'M = 90^\circ \Longrightarrow P\hat{O}'M = 90^\circ$

Então P pertence ao círculo circunscrito ao triângulo MOO', tal que MP é um diâmetro. Logo, P é fixo.

O L.G. de M' é a reta perpendicular ao plano MOO', passando por P.



4a. QUESTÃO | ITEM 4 | VALOR : 1,0

Em um triângulo ABC dá-se o ângulo $\hat{A}$, o raio do círculo ex-inscrito r_a (relativo ao ângulo $\hat{A}$) e a altura h_a (relativa ao lado a).

(Valor 0,5) a) Indique a construção do triângulo ABC e conclua daí a condição que deve haver entre os elementos dados para que a construção seja possível, isto é, para que exista o triângulo ABC, escaleno.

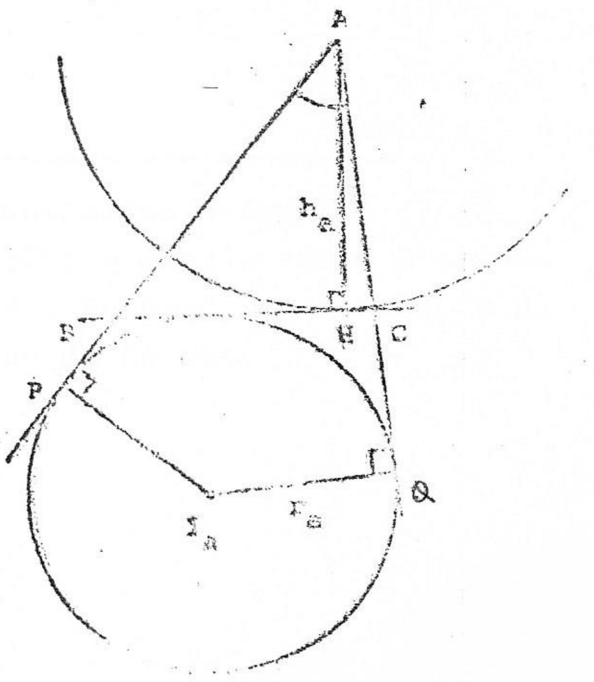
(Valor 0,5) b) Deduza as expressões de a, b.c e de b + c, em função dos elementos dados.

SOLUÇÃO:

Fixo o círculo (I_a, r_a), marcando o ângulo central $PI_aQ = 180^\circ - A$, e traçam-se as tangentes em P e Q, que determinam o ponto A.

A reta BC é tangente comum interior aos círculos (I_a, r_a) e (A, h_a).

O problema é possível, com Δ ABC escaleno, quando os círculos: (I_a, r_a) e (A, h_a) são exteriores, então:



$AI_a > h_a + r_a$

No $\triangle\, API_a$: $AI_a = \dfrac{r_a}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$.

A construção é possível se $\dfrac{r_a}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} > h_a + r_a \Longrightarrow h_a < \dfrac{r_a(1 - \operatorname{sen}\frac{A}{2})}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$.

i) Temos que:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r_a}{p} \Longrightarrow p = r_a \cdot \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

e $ah_a = 2(p - a)r_a$

logo:

$$ah_a = 2\, r_a^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2} - 2ar_a \Longrightarrow a = \frac{2r_a^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{h_a + 2r_a}$$

ii) $bc \operatorname{sen} A = ah_a \Longrightarrow bc \cdot 2\operatorname{sen}\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} = \dfrac{2r_a^2 \cdot \cos\frac{A}{2} / \operatorname{sen}\frac{A}{2}}{h_a + 2r_a}\, h_a \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow bc = \frac{r_a^2\, h_a \csc^2\frac{A}{2}}{h_a + 2r_a}$$

iii) $b + c = 2p - a = 2r_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2} - \dfrac{2r_a^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{h_a + 2r_a} =$

$$= 2r_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\left[1 - \frac{r_a}{h_a + 2r_a}\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b + c = 2r_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \cdot \frac{h_a + r_a}{h_a + 2r_a}$$

5a. QUESTÃO — ITEM 5 — VALOR : 1,0

É dada uma elipse de eixo focal 2a e excentricidade igual a $\sqrt{2/3}$. Esta elipse é seção de um cone de revolução: o ângulo que o plano da elipse forma com o eixo do cone é $\beta = 45°$. Pede-se, em função de a, a distância do vértice V do cone ao plano da elipse.

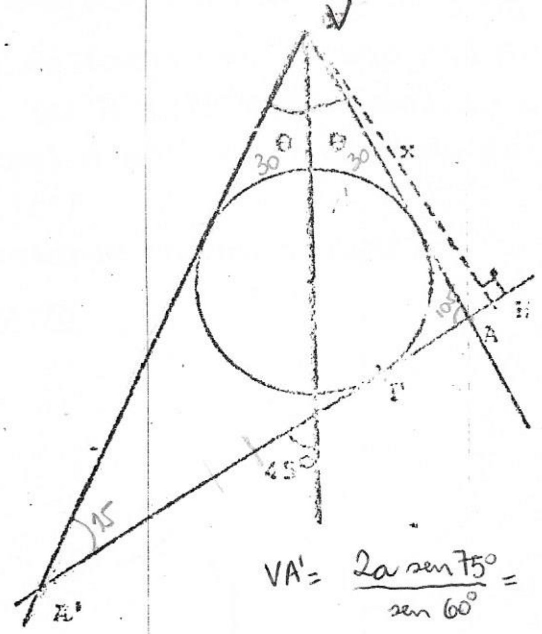
SOLUÇÃO

$$e = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\cos 45^\circ}{\cos\theta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \theta = 30^\circ \longrightarrow \widehat{VA'A} = 15^\circ$$



lei dos senos no Δ VAA'

$\frac{VA'}{sen\,75^\circ} = \frac{2a}{sen\,60^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow VA' = \frac{4a\sqrt{3}}{3} \cdot sen\,75^\circ$

$VA' = \frac{2a\,sen\,75^\circ}{sen\,60^\circ} = \frac{4a\,sen\,75}{\sqrt{3}} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}\,sen\,75^\circ$

No Δ VA'H:

$x = VA' \cdot sen\,15^\circ = \overbrace{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{?} \cdot sen\,75^\circ \cdot sen\,15^\circ = \overbrace{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{?} \cdot \frac{4}{2}\,(cos\,60^\circ - cos\,90^\circ) \Rightarrow$

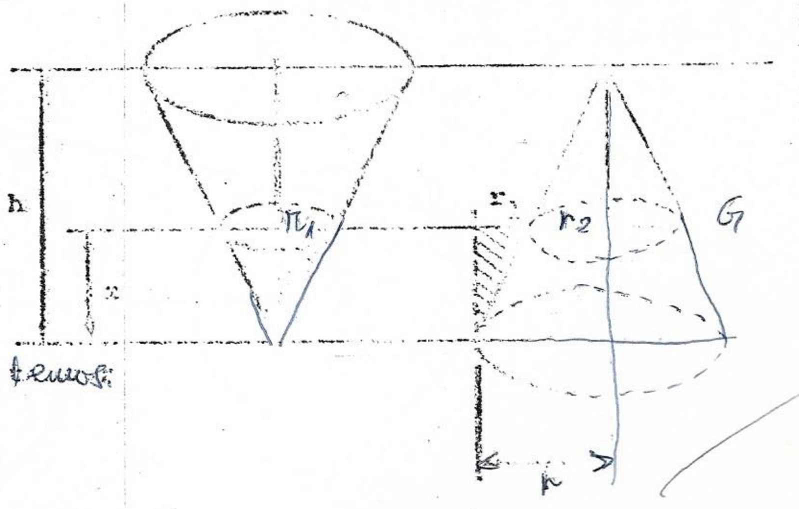
$\Rightarrow x = \frac{4a\sqrt{3}}{3}\,sen\,75 \cdot sen\,15 = \frac{4a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}[\underbrace{cos\,60}_{1/2} - \underbrace{cos\,90}_{0}] = \boxed{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$

6a. QUESTÃO ITEM 6 VALOR : 1,5

São dadas duas superfícies cônicas de revolução, congruentes e de eixos paralelos. Secionam-se essas duas superfícies por dois planos π e π' perpendiculares ao eixo de revolução, passando cada qual pelo vértice de uma das superfícies. Designam-se por (c) e (c') os cones resultantes situados entre os dois planos. Seja h a distância entre π e π'. Cortam-se (c) e (c') por um terceiro plano δ, paralelo a π e π', a uma distância variável x de π

Valor ... a) Mostre que a soma dos perímetros das seções (k) e (k'), determinadas por δ em (c) e (c') é costante.

SOLUÇÃO



Sendo r o raio da base de cada cone, temos:

$r_1 + r_2 = r$ Então:

$2P_1 + 2P_2 = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi r$

(Valor 0,8)

b) Determine x de forma que a soma das áreas das duas seções (k) e (k') seja igual ao produto de um número real m pela área da base de um dos cones (c) ou (c').

Entre que valores poderá variar m?

SOLUÇÃO

$S_1 + S_2 = m \cdot r^2 \pi$

$\frac{r_1}{r} = \frac{x}{h} \Longrightarrow r_1 = \frac{rx}{h}$

$\frac{r_2}{r} = \frac{h-x}{h} \Longrightarrow r_2 = \frac{r}{h}(h-x)$

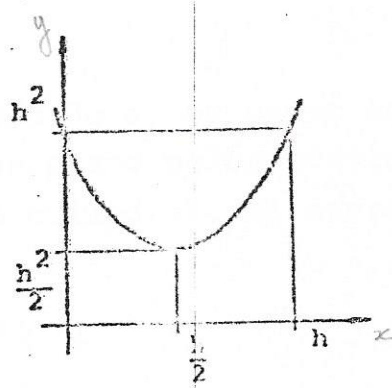
$S_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2$

$S_2 = \pi r_2^2 = \frac{\pi r^2}{h^2}(h^2 + x^2 - 2hx)$

$S_1 + S_2 = \frac{\pi r^2}{h^2}(h^2 + 2x^2 - 2hx)$

$S_1 + S_2 = m\pi r^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow m = \frac{1}{h^2}(2x^2 - 2hx + h^2)$



No intervalo $[0, h]$, o trinômio $y = 2x^2 - 2hx + h^2$ varia de $\frac{h^2}{2}$ a h^2.

Então, a variação de m é:

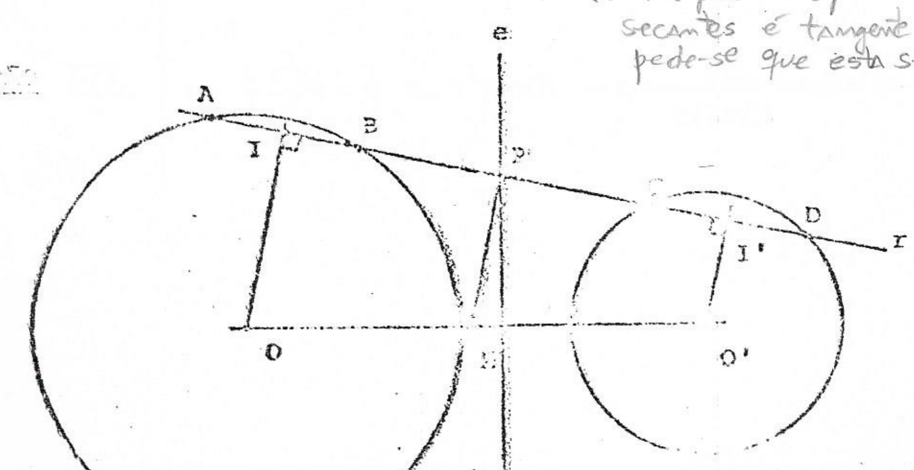
$\boxed{\frac{1}{2} < m < 1}$ $\forall x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq h$ é válido.

7a. QUESTÃO ITEM 7 VALOR : 1,0

Dados dois círculos externos de raios distintos, mostre que o conjunto de secantes que determinam em ambos cordas iguais, é tal que cada uma dessas secantes é tangente à uma parábola, que se pede identificar.

(É tal que dado que uma dessas secantes é tangente a uma parábola, pede-se que esta seja identificada.)

SOLUÇÃO



Seja r tal que $AB = CD$;

Sejam M e P pontos médios de OO' e BC.

$$\left.\begin{array}{l} PB = PC \\ PA = PD \end{array}\right| \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $P \in$ eixo radical e dos círculos (O) e (O')

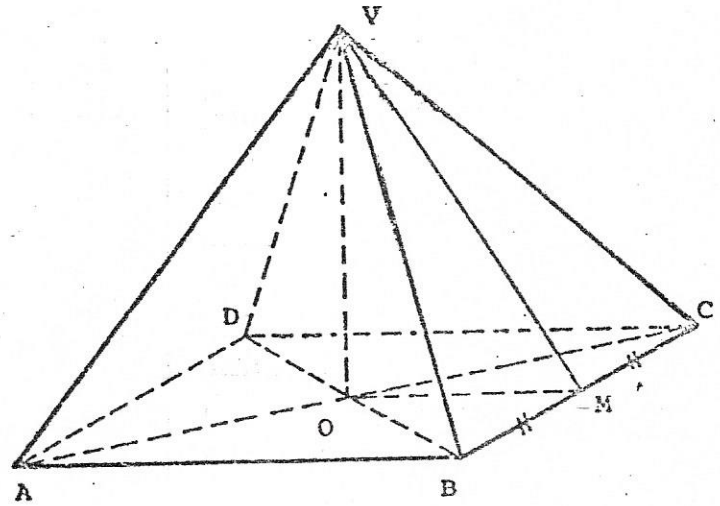
$PI = PI' \Rightarrow MP$ é base média do trapézio $OII'O' \Rightarrow MP \perp r$.

Então, a projeção de M sobre a reta r pertence à reta e. Logo r é tangente a uma parábola de foco M e tangente no vértice e.

8a. QUESTÃO | ITEM 8 | VALOR : 1,5

Uma pirâmide de vértice V e base ABCD constitue a metade de um octaedro regular de aresta a.

(Valor 0,8) a) Determine em função de a, os raios das esferas medial (esfera que passa pelos pontos médios das arestas deste poliedro), circunscrita e inscrita;



Esfera circunscrita:

$R = OV = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Esfera inscrita:

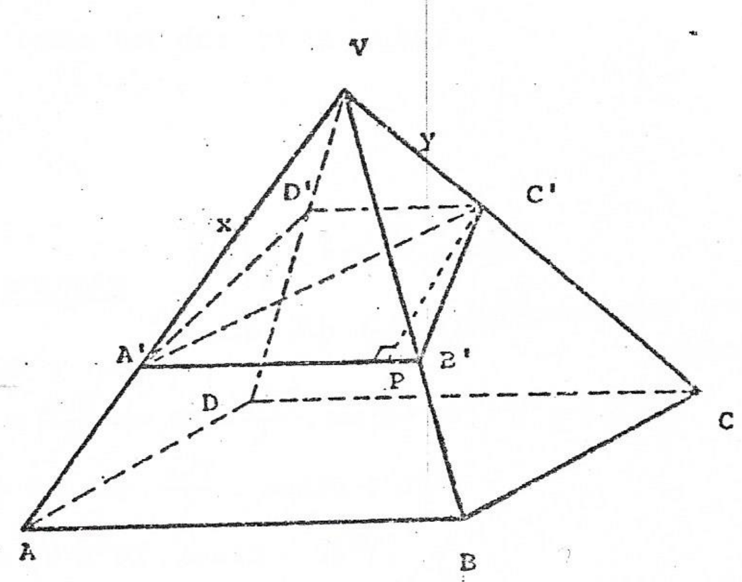
$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{1}{3}\, r \cdot S_T \\ V = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ S_T = a^2 + a^2\sqrt{3} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{3}\,\frac{a^3\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot a^2(1+\sqrt{3}) \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}a}{2(1+\sqrt{3})} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)a}{4}$$

Esfera medial:

$r_a = OM = \dfrac{a}{2}$.

(Valor 0,7) b) Marcam-se sobre VA e VB os segmentos VA' = VB' = x; marcam- se sobre VC e VD os segmentos VC'= VD' = y; Supõe-se que x e y variam sob a condiçao de x + y = a . Determine x e y, em função de a, de forma que a área do quadrilátero A' B' C' D' seja igual a $\frac{a^2}{4}$.

SOLUÇÃO



Área de A'B'C'D'.

$$S = \frac{A'B' + C'D'}{2} \cdot C'P$$

$$S = \frac{x+y}{2} \cdot C'P = \frac{a^2}{4}$$

$$S = \frac{a}{2} \cdot C'P = \frac{a^2}{4} \Longrightarrow C'P = \frac{a}{2}$$

No Δ VA'C':

$$A'\hat{V}C' = 90^\circ \Longrightarrow A'C' = \sqrt{x^2+y^2}$$

Do Δ A'PC' temos:

$$\overline{A'C'}^2 = \overline{A'P}^2 + \overline{PC'}^2$$

$$x^2+y^2 = (x - \frac{x-y}{2})^2 + \frac{a^2}{4} \Longrightarrow x^2+y^2 = (\frac{x+y}{2})^2 + \frac{a^2}{4} \Longrightarrow x^2+y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Logo:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 = \frac{a^2}{2} \\ x+y = a \end{array}\right| \Longrightarrow x = y = \frac{a}{2}$$