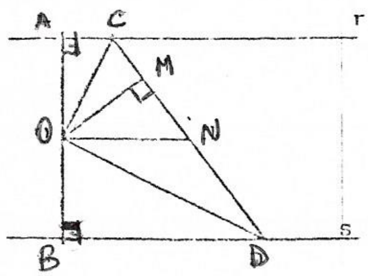
1ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1,5)

ENUNCIADO: Sejam duas retas paralelas (r) e (s), e um segmento AB (A pertencente a (r), e B pertencente a (s)), perpendicular a ambas. Sobre (r) e (s), e à direita de AB, marcam-se os pontos C e D, tais que $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{4}$. Tomando-se C e D como centros, traçam-se os círculos (c) e (d) tangentes a AB.

(Valor 0,7): 1) Sendo O o meio de AB, mostre que o triângulo COD é retângulo e que (c) e (d) são tangentes entre si em um ponto M, cujo lugar geométrico é pedido.

SOLUÇÃO



$AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$

1) $AC \cdot BD = OA \cdot OB \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{AC}{OB} = \frac{OA}{BD} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^o \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta\, AOC \sim \Delta\, BDO \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} A\hat{O}C = B\hat{D}O = x \\ A\hat{C}O = B\hat{O}D = y \end{array}\right.$, onde $x + y = 90^o$

$A\hat{O}C + C\hat{O}D + B\hat{O}D = 180^o \Longrightarrow C\hat{O}D = 180^o - (x + y) = 90^o$.

Traçando $OM \perp CD$ e $ON \parallel r$, temos:

$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ ON \parallel AC \parallel BD \end{array}\right| \Longrightarrow NC = ND$

ON é mediana relativa à hipotenusa do Δ COD $\Longrightarrow N\hat{O}C = O\hat{C}N$

Mas $N\hat{O}C = A\hat{C}O$ (alternos internos).

Logo, $O\hat{C}N = A\hat{C}O$.

Então:

$\left.\begin{array}{l} OC - \text{comum} \\ O\hat{C}N = O\hat{C}A \\ O\hat{A}C = O\hat{M}C = 90^o \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta\, OAC = \Delta\, OCM \Longrightarrow CA = CM$

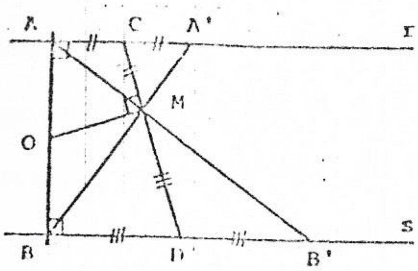
Analogamente, $\Delta\, OBD = \Delta\, OMD \Longrightarrow DB = DM$.

Daí, os círculos (c) e (d) são tangentes em M.

Da congruência dos triângulos OAC e OCM, temos ainda que $OM = OA = OB \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ o L.G. de M é o semi-círculo de diâmetro AB (exceto A e B).

(Valor 0,8): 2) Prolongando-se AM até B', pertencente a (s), e BM até A', pertencente a (r), calcule AC, tal que AA' + BB' = = 4AB.



2) MC e MD são medianas dos triângulos retângulos MAA' e MBB' $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} AC = \dfrac{AA'}{2} \\ BD = \dfrac{BB'}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow AC + BD = \frac{AA' + BB'}{2} = 2AB$$

Então:

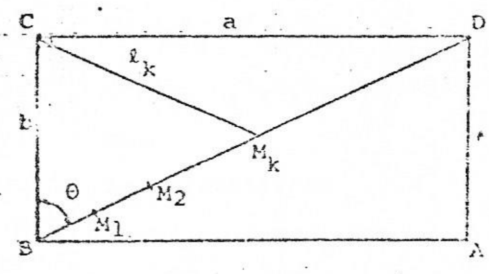
$$\left| \begin{array}{l} AC \cdot BD = \dfrac{AB^2}{4} \\ AC + BD = 2AB \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{AC = AB\left(\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}\right)}$$

2ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Dado um retângulo ABCD, de lados a e b, divide-se a diagonal $\overline{BD}$ em n segmentos iguais, marcando-se os pontos M_1, M_2, ..., M_{n-1} (na ordem B, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, D).

Estabeleça a expressão geral dos segmentos $\overline{CM_k} = \ell_k$, $k = 1, 2, ..., n-1$, em função de a, b, n e k.

SOLUÇÃO



$$BD = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BM_k = \frac{k}{n} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

LEI DOS COSSENOS NO TRIÂNGULO BCM_k

$$CM_k^2 = BC^2 + BM_k^2 - 2 . BC . BM_k . \cos\theta$$

$$\Longrightarrow \ell_k^2 = b^2 + \frac{k^2}{n^2}(a^2 + b^2) - 2 . b . \frac{k}{n}\sqrt{a^2 + b^2} . \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Longrightarrow \ell_k^2 = \frac{n^2b^2 + k^2a^2 + k^2b^2 - 2nkb^2}{n^2} = \frac{k^2a^2 + (n^2 - 2nk + k^2) . b^2}{n^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\ell_k = \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 . a^2 + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 . b^2}}$$

OBSERVAÇÃO:

Se considerarmos AB = b e AD = a, teremos:

$$\ell_k = \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 b^2 + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 a^2}$$

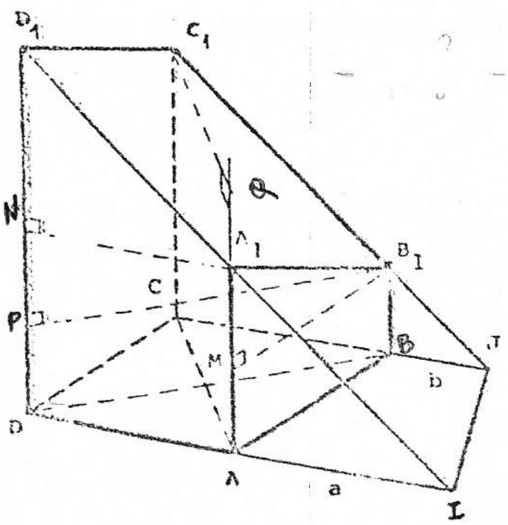
3ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Considera-se um quadrado ABCD pertencente a um plano (π). Traçam-se pelos quatro vértices perpendiculares ao plano (π). Sobre o prolongamento de DA (no sentido de D para A), marca-se a partir do A um segmento $\overline{AI}$ igual a $\underline{a}$ e sobre o prolongamento de CB (no sentido de CB), marca-se a partir de B, um segmento $\overline{BJ}$, igual a $\underline{b}$, tal que $\underline{a} > \underline{b}$. Um plano qualquer, passando por IJ, corta as perpendiculares ao plano (π), formando um quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ (A_1 correspondendo a A, B_1 a B; C_1 a C e D_1 a D).

(Valor 0,5): 1) Determine a natureza do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ e estabeleça a relação existente entre as razões:

$$\frac{\overline{AA_1}}{a} \text{ e } \frac{\overline{BB_1}}{b}.$$

SOLUÇÃO



(1) Os planos ABB_1A_1 e CDD_1C_1 são paralelos $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1$

Os planos ADD_1A_1 e BCC_1B_1 são paralelos $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1D_1 \parallel B_1C_1$.

Então, $A_1B_1C_1D_1$ é paralelogramo.

Do paralelismo:

$\Delta\, AIA_1 \sim \Delta\, BJB_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AA_1}{a} = \dfrac{BB_1}{b}$.

(Valor 0,5): 2) Supondo as razões iguais a k e $\overline{AB}$ igual a unidade, calcule os lados e as diagonais do quadrilátero em função de k, a e b.

(2) Sendo $B_1M \parallel AB$, no $\Delta\, A_1B_1M$:

$$\left.\begin{array}{l} B_1M = AB = 1 \\ A_1M = AA_1 - BB_1 = k(a - b) \end{array}\right| \Rightarrow A_1B_1^2 = 1 + k^2(a - b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1B_1 = \sqrt{1 + k^2(a - b)^2} = C_1D_1}$$

Sendo $A_1N \parallel AD$, no $\Delta\, A_1D_1N$:

$$\left.\begin{array}{l} A_1N = 1 \\ D_1N = k \cdot A_1N = k \end{array}\right| \Longrightarrow \boxed{A_1D_1 = \sqrt{1 + k^2} = B_1C_1}$$

Sendo $B_1P \parallel BD$, no $\Delta\, B_1D_1P$:

$$\left.\begin{array}{l} B_1P = BD = \sqrt{2} \\ D_1P = DD_1 - BB_1 = k(a + 1) - kb = k(a - b + 1) \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{B_1D_1 = \sqrt{2 + k^2(a - b + 1)^2}}$$

Sendo $C_1Q \parallel AC$, no $\Delta\, A_1C_1Q$:

$$\left.\begin{array}{l} C_1Q = AC = \sqrt{2} \\ A_1Q = CC_1 - AA_1 = k(b + 1) - ka = k(b - a + 1) \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_1C_1 = \sqrt{2 + k^2\,(b - a + 1)^2}}$$

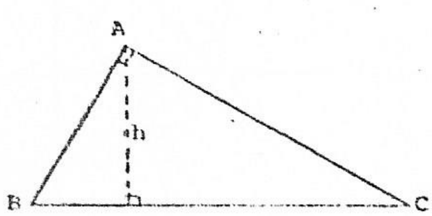
4ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Seja (T) um triângulo retângulo em A, sendo os outros vértices B e C.

(Valor 0,5): 1) Dá-se a razão $m = \frac{2p}{a}$, onde a é a hipotenusa e p o semiperímetro. Indique entre que valores m pode variar para que o problema tenha solução, e calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em função de m.

SOLUÇÃO

$$(1)\quad M = \frac{2p}{a} = \frac{a + b + c}{a}$$



$$\Longrightarrow m = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

$$\Longrightarrow m - 1 = \text{sen } B + \cos B \quad (\times \tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\Longrightarrow \text{sen}(B + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(m - 1) \Longrightarrow$$

$$0 < B < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\pi}{4} < B + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen}(B + \tfrac{\pi}{4}) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}(m - 1) \leq 1 \Longrightarrow 1 < m - 1 \leq \sqrt{2} \Longrightarrow \boxed{2 < m \leq \sqrt{2} + 1}$$

Para estes valores de m:

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{B} = \text{arc sen}\,\dfrac{\sqrt{2}(m-1)}{2} - \dfrac{\pi}{4} \\[2ex] \hat{C} = \dfrac{3\pi}{4} - \text{arc sen}\,\dfrac{\sqrt{2}(m-1)}{2} \end{array}}$$

(ou "vice-versa")

(Valor 0,5): 2) São dados a hipotenusa $\underline{a}$ de (t) e volume $V = \dfrac{\pi a^3}{48}$, gerado quando (T) gira em torno da hipotenusa.

Calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em graus ou o valor numérico de uma de suas linhas trigonométricas.

(2) $V = \dfrac{\pi}{3} h^2 a \Longrightarrow \dfrac{\pi}{3} h^2 a = \dfrac{\pi a^3}{48} \Longrightarrow h^2 = \dfrac{a^2}{16} \Longrightarrow \dfrac{a}{h} = 4$

$\Longrightarrow \text{ctg } B + \text{ctg } C = 4 \Longrightarrow \text{tg } B + \dfrac{1}{\text{tg } B} = 4 \Longrightarrow \text{tg}^2 B - 4\,\text{tg } B + 1 = 0$

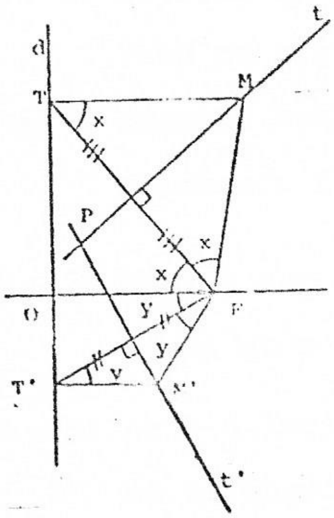
$\Longrightarrow \text{tg } B = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{lcl} \hat{B} = 15^\circ & & \hat{B} = 75^\circ \\ & \text{ou} & \\ \hat{C} = 75^\circ & & \hat{C} = 15^\circ \end{array}}$$

5ª QUESTÃO — ITEM: 1 — (VALOR: 0,8)

ENUNCIADO: Seja (d) a diretriz e F o foco de uma parábola. Seja $\overline{MM'}$ uma corda focal qualquer. Mostre que as tangentes em M e M' encontram-se em P, pertencente a (d) e que a reta PF é perpendicular a $\overline{MM'}$.

SOLUÇÃO



As tangentes em M e M' são mediatrizes de FT e FT', onde T e T' pertencem a d, e MT e M'T' são perpendiculares a d.

Sendo OF o eixo da parábola:

$MF = MT \Longrightarrow M\hat{F}T = M\hat{T}F = x$

mas $OF \,//\, MT \Longrightarrow O\hat{F}T = M\hat{T}F = x.$

Então, $O\hat{F}T = M\hat{F}T = x$

Da mesma forma, $O\hat{F}T' = M'\hat{F}T' = y.$

M,F,M' são colineares $\Longrightarrow M\hat{F}M' = 180^\circ$

$\Longrightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Longrightarrow x + y = 90^\circ.$

Então, $T\hat{F}T' = x + y = 90^\circ.$

o ponto P é circuncentro do Δ TFT'; como $T\hat{F}T' = 90^\circ$, então P é ponto médio de TT' (P , d).

Pelo Teorema de Poncelet, PF é bissetriz do ângulo $M\hat{F}M'$.

Como $M\hat{F}M' = 180°$, então $P\hat{F}M = P\hat{F}M' = 90^o$.

QUESTÃO | ITEM: 2 | (VALOR: 0,8)

ENUNCIADO: Sejam uma elipse (e) e uma hipérbole (h) tendo os mesmos focos e o mesmo eixo não focal. Estabeleça a relação na forma $f(\varepsilon, \varepsilon') = 0$, sendo ε e ε' as excentricidades de (e) e (h), respectivamente.

SOLUÇÃO

$$\left.\begin{array}{l} a_e^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon^2} = \dfrac{b^2}{c^2} + 1 \\ \\ a_h^2 = c^2 - b^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon'^2} = 1 - \dfrac{b^2}{c^2} \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon'^2} = 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon'^2} = 2 - \frac{1}{\varepsilon^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon'^2} - 2 = 0}$$

6ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1,5)

ENUNCIADO: Em um plano (π) dá-se uma circunferência (c) de centro O e raio r. Por um ponto A pertencente a (c), tira-se a perpendicular a (π) e marca-se $\overline{AV} = x$, V acima de (π).

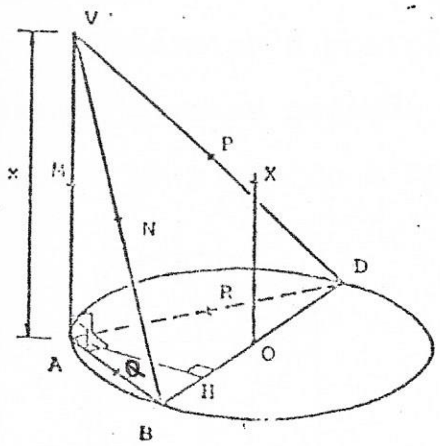
(Valor 0,4): 1) Seja $\overline{BD}$ um diâmetro de (c): mostre que no tetraedro VABD os três pares de retas que ligam os meios das arestas opostas concorrem em um ponto, ponto esse que permanece fixo quando BD gira em torno de O.

(Valor 0,3): 2) Mostre que as arestas opostas de VABD são perpendiculares duas a duas.

(Valor 0,4): 3) Ache o lugar geométrico do pé da altura tirada de V no triângulo VBD, quando $\overline{BD}$ gira em torno de O.

(Valor 0,4): 4) Determine o centro e o raio da esfera circunscrita ao tetraedro VABD em função de r e x.

SOLUÇÃO



1) Sejam M, N, P, Q, R, O, os pontos médios das arestas. Vemos bases médias nos triângulos:

$\Delta\ VAD$: $MP \parallel AD$ e $MP = \frac{AD}{2}$

$\Delta\ ABD$: $OQ \parallel AD$ e $OQ = \frac{AD}{2}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $MP \parallel OQ$ e $MP = OQ$ $\Longrightarrow$ MPOQ é paralelogramo $\Longrightarrow$ OM e PQ se cortam ao meio.

Da mesma forma, RMNO é paralelogramo $\Longrightarrow$ OM e NR se cortam ao meio.

Então, PQ e NR passam pelo ponto médio de OM, que é fixo (O e M são fixos).

Paralelogramos:
ORMN –
NPQR
OQMP –

2) $VA \perp \pi \Longrightarrow VA \perp AB$ e $VA \perp AD$

BD é diâmetro $\Longrightarrow B\hat{A}D = 90^\circ$.

Então o tetraedro tem o triedro A tri-retângulo.

$VA \perp ABD \Longrightarrow VA \perp BD$

$BA \perp VAD \Longrightarrow BA \perp VD$

$DA \perp VAB \Longrightarrow DA \perp VB$.

3) Sendo $AH \perp BD$, pelo Teorema das 3 perpendiculares temos que:

$VH \perp BD \Longrightarrow$ H é o pé da altura.

$A\hat{H}O = 90^\circ$
A e O fixos $\Longrightarrow$ O L.G. de H é o círculo de diâmetro AO.

4) Sendo X o centro da esfera circunscrita, X eqüidista de A, B, D $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ X pertence à reta perpendicular a π, passando por O.

$XV = XA \Longrightarrow X \in$ plano mediador de VA (paralelo a π) $\Longrightarrow OX = \frac{x}{2}$.

O raio da esfera é: $R = XB$: No Δ OXB:

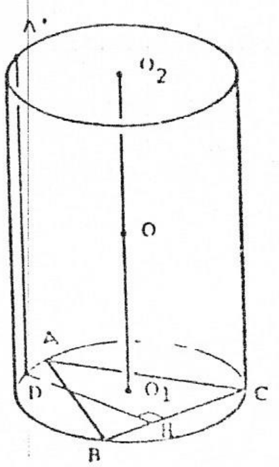
$$\left.\begin{array}{l} OX = \frac{x}{2} \\ OB = r \end{array}\right| \Longrightarrow R^2 = \frac{x^2}{4} + r^2 \Longrightarrow R = \sqrt{\frac{x^2}{4} + r^2}$$

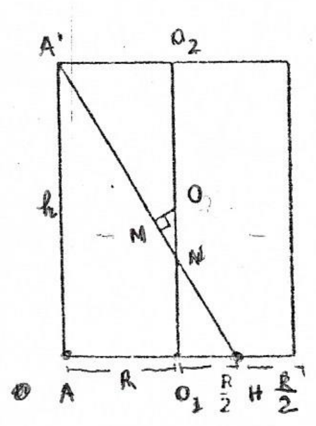
7ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1,0)

ENUNCIADO: Sejam (k) e (k') os círculos das bases e O o centro do cilindro de raio R e altura h. No círculo (k), inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Um ponto A', pertencente ao círculo (k'), projeta-se paralelamente ao eixo do cilindro, em um ponto D do arco de (k) que subentende BC.

Determine a posição de A' para que a área do triângulo A'BC seja máxima, e nessa posição de A' calcule a distância de O (centro do cilindro) ao plano de A'BC.

SOLUÇÃO





Traçando DH ⊥ BC, temos A'H ⊥ BC.

A área de A'BC é $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot A'H$

BC é constante. Então S é máxima quando A'H é máximo.

No triângulo retângulo A'DH, A'D é constante. Então, A'H é máximo quando DH é máximo, logo D ≡ A.

No Δ A'AH: $A'H = \sqrt{h^2 + \frac{9R^2}{4}}$

$\Delta HO_1N \sim \Delta HAA' \Rightarrow \frac{O_1N}{h} = \frac{R/2}{3R/2} \Rightarrow O_1N = \frac{h}{3} \Rightarrow$

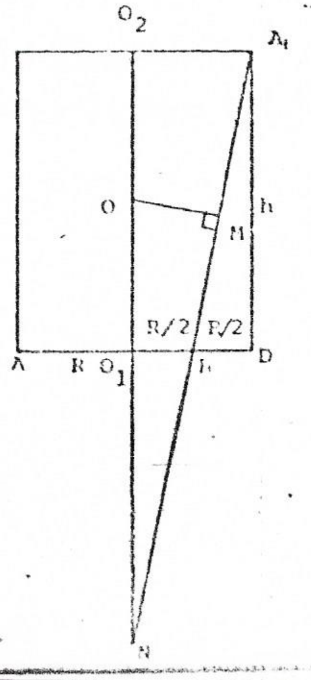
$\Rightarrow ON = OO_1 - O_1N = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$

$\Delta OMN \sim \Delta HAA' \Rightarrow \frac{OM}{AH} = \frac{ON}{A'H} \Rightarrow$

$$\Rightarrow OM = \frac{\frac{h}{6} \cdot 3R/2}{\sqrt{h^2 + \frac{9R^2}{4}}} = \frac{hR}{4\sqrt{h^2+\frac{9R^2}{4}}} = \frac{hR}{2\sqrt{4h^2+9R^2}}$$

OBSERVAÇÃO:

O enunciado não especifica a qual dos arcos que subentendem BC pertence o ponto D. Se considerando que D pertence ao menor arco BC, a área A'BC é máxima quando $\widehat{DB} = \widehat{DC}$.



Neste caso:

No Δ A'HD : $A'H = \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}}$

$\Delta HO_1N = \Delta HDA' \Rightarrow O_1N = DA' = h \Rightarrow$

$\Rightarrow ON = OO_1 + O_1N = \frac{h}{2} + h = \frac{3h}{2}$

$\Delta OMN \sim \Delta HDA' \Rightarrow \frac{OM}{HD} = \frac{ON}{HA'} \Rightarrow$

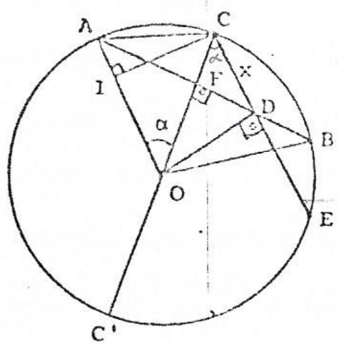
$$\Rightarrow OM = \frac{\frac{3h}{2} \cdot \frac{R}{2}}{\sqrt{h^2+\frac{R^2}{4}}} = \frac{3hR}{4\sqrt{h^2+\frac{R^2}{4}}} = \frac{3hR}{2\sqrt{4h^2+R^2}}$$

8ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Por um ponto C, ponto médio de um arco AB qualquer, de uma circunferência (k) de centro O (AB < 180°), traça-se a corda CDE, paralela ao raio AO (D interseção de CDE com AB e E pertence a (k)).

Determine o valor do ângulo AÔB (definido pelo valor numérico de alguma de suas linhas trigonométricas), para que o ponto D seja o ponto médio de CE.

SOLUÇÃO



$$\left.\begin{array}{l} \overline{CD}^2 = \overline{CF} \cdot \overline{CO} \\ \overline{CA}^2 = \overline{CF} \cdot \overline{CC'} \end{array}\right| \Longrightarrow \overline{CA}^2 = 2\,\overline{CD}^2$$

No Δ AIC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IC}^2$$

$$2x^2 = (R - x)^2 + (R^2 - x^2)$$

$$2x^2 = R^2 - 2Rx + x^2 + R^2 - x^2$$

$$2x^2 = 2R^2 - 2Rx$$

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{x}{R} - 1 = 0$$

$$(\cos\alpha)^2 + \cos\alpha - 1 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 - \sqrt{5}$$

$$\boxed{\cos A\hat{O}B = 2 - \sqrt{5}}$$

$2\cos^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha - 2 = +1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\cos\alpha = 1 - (-1 \pm \sqrt{5}) = 2 \pm \sqrt{5}$ → só existe $\cos 2\alpha = 2 - \sqrt{5}$