MINISTÉRIO DO EXÉRCITO
DEP – CTEx
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

1.º ANO

1981 / 1982

MINISTERIO DO EXERCITO
DEP — C T Ex
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

IME

COMISSÃO DE EXAME DE ESCOLARIDADE

1981/82

INSTRUÇÕES PARA REALIZAÇÃO DA PROVA DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

1. NÃO ASSINE A PROVA.
2. Utilize a caneta esferográfica fornecida pelo Grupo de Aplicação e Fiscalização. As figuras julgadas necessárias deverão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores.
3. O espaço destinado à solução de cada questão é suficiente. Portanto, não será considerada resolução fora do local especificamente designado.
4. Não será fornecido material suplementar. A prova fornecida contém 4 (quatro) folhas de papel para rascunho, o qual poderá ser feito também no verso das folhas de questões. Note-se, no entanto, que o rascunho não será levado em conta, para efeito de correção.
5. A interpretação das questões faz parte da resolução. São vedadas perguntas ao Grupo de Aplicação e Fiscalização.
6. A prova está sob a forma de caderno. Não é permitido destacar suas folhas. Ao entregar a prova devolva todo o material recebido.
7. Esta prova contém, além da capa e da presente folha de instruções, 16 (dezesseis) folhas numeradas de 1 (um) a 16 (dezesseis).
8. O tempo para solução desta prova é 4 (quatro) horas.
9. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Seja sucinto, evitando divagações.

B O A   S O R T E

IME – CEE 81/82 | GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA | FOLHA 1

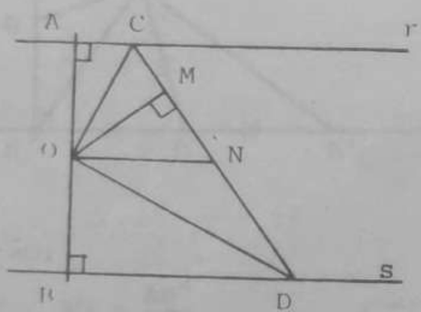
1ª QUESTÃO | VALOR 1,5

Sejam duas retas paralelas (r) e (s), e um segmento AB (A pertencente a (r), e B pertencente a (s)), perpendicular a ambas. Sobre (r) e (s), e à direita de AB, marcam-se os pontos C e D, tais que $\overline{AC}.\overline{BD}=\frac{\overline{AB}^2}{4}$.

Tomando-se C e D como centros, traçam-se os círculos (c) e (d) tangentes a AB.

(Valor 0,7) 1) Sendo O o meio de AB, mostre que o triângulo COD é retângulo e que (c) e (d) são tangentes entre si em um ponto M, cujo lugar geométrico é pedido.

(Valor 0,8) 2) Prolongando-se AM até B', pertencente a (s), e BM até A', pertencente a (r), calcule AC, tal que AA'+BB'=4AB.



SOLUÇÃO

$$AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$$

1) $AC \cdot BD = OA \cdot OB \implies$

$$\implies \left.\begin{array}{l}\frac{AC}{OB} = \frac{OA}{BD} \\ \hat{A}=\hat{B}=90^\circ\end{array}\right| \implies \Delta\ AOC \sim \Delta\ BDO \implies$$

$$\implies \left|\begin{array}{l} A\hat{O}C = B\hat{D}O = x \\ A\hat{C}O = B\hat{O}D = y\end{array}\right., \text{ onde } x + y = 90^\circ$$

$A\hat{O}C + C\hat{O}D + B\hat{O}D = 180^\circ \implies C\hat{O}D = 180^\circ - (x + y) = 90^\circ$.

Traçando $OM \perp CD$ e $ON \parallel r$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ ON \parallel AC \parallel BD\end{array}\right| \implies NC = ND$$

ON é mediana relativa à hipotenusa do Δ COD $\implies N\hat{O}C = O\hat{C}N$

Mas $N\hat{O}C = A\hat{C}O$ (alternos internos).

Logo, $O\hat{C}N = A\hat{C}O$.

IME - CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 2

1ª QUESTÃO (Continuação)

Então:

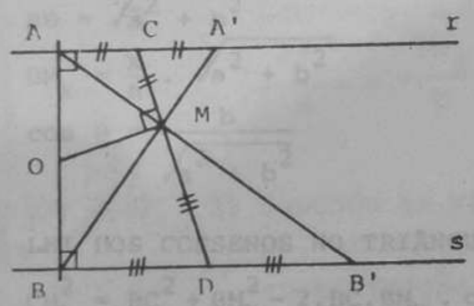
$$\left.\begin{array}{l} OC \text{ - comum} \\ O\hat{C}N = O\hat{C}A \\ O\hat{A}C = O\hat{M}C = 90^{\circ} \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta\, OAC = \Delta\, OCM \Longrightarrow CA = CM$$

Analogamente, $\Delta\, OBD = \Delta\, OMD \Longrightarrow DB = DM$.

Daí, os círculos (c) e (d) são tangentes em M.

Da congruência dos triângulos OAC e OCM, temos ainda que $OM = OA = OB \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ o L.G. de M é o semi-círculo de diâmetro AB (exceto A e B).



2) MC e MD são medianas dos triângulos retângulos MAA' e MBB' $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} AC = \dfrac{AA'}{2} \\ \\ BD = \dfrac{BB'}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow AC + BD = \frac{AA' + BB'}{2} = 2AB$$

Então:

$$\left| \begin{array}{l} AC \,.\, BD = \dfrac{AB^2}{4} \\ \\ AC + BD = 2Ab \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{AC = AB\left(\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}\right)}$$

IME – CEE 81/82 | GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA | FOLHA 3

2ª QUESTÃO — VALOR 1,0

Dado um retângulo ABCD, de lados a e b, divide-se a diagonal $\overline{BD}$ em n segmentos iguais, marcando-se os pontos $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ (na ordem B, $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, D).

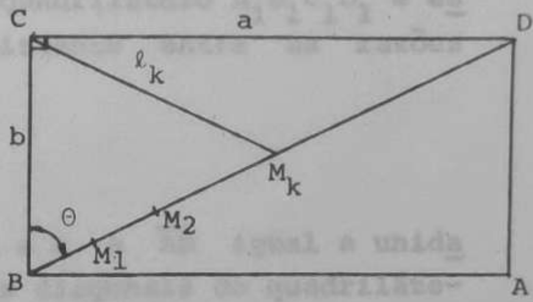
Estabeleça a expressão geral dos segmentos $\overline{CM_k} = \ell_k$, k = 1, 2, ..., n−1, em função de a, b, n e k.

<u>SOLUÇÃO</u>

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BM_k = \frac{k}{n} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



LEI DOS COSSENOS NO TRIÂNGULO BCM_k

$$CM_k^2 = BC^2 + BM_k^2 - 2.BC.BM_k \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \ell_k^2 = b^2 + \frac{k^2}{n^2}(a^2 + b^2) - 2.b \cdot \frac{k}{n}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \ell_k^2 = \frac{n^2b^2 + k^2a^2 + k^2b^2 - 2\,nkb^2}{n^2} = \frac{k^2a^2 + (n^2 - 2nk + k^2).b^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_k = \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 . a^2 + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 . b^2}}$$

<u>OBSERVAÇÃO</u>:

Se considerarmos AB = b e AD = a, teremos:

$$\ell_k = \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 b^2 + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 a^2}$$

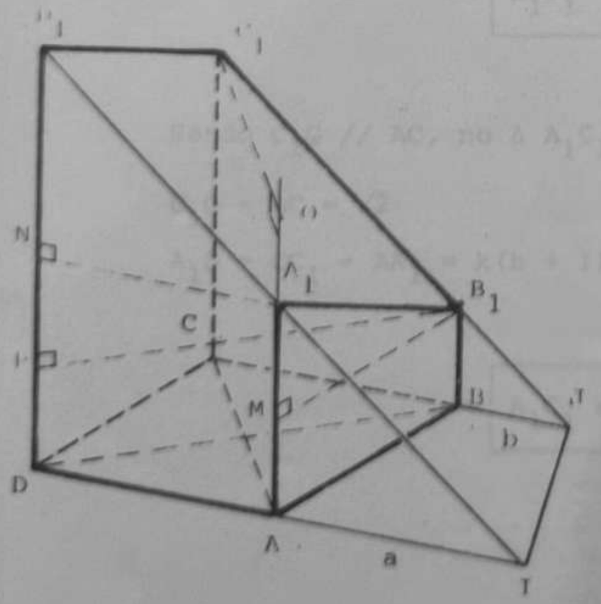
IME – CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 4
3ª QUESTÃO			VALOR 1,0

Considera-se um quadrado ABCD pertencente a um plano (π). Traçam-se pelos quatro vértices perpendiculares ao plano (π). Sobre o prolongamento de DA (no sentido de D para A), marca-se a partir de A um segmento $\overline{AI}$ igual a $\underline{a}$ e sobre o prolongamento de CB (no sentido de CB), marca-se a partir de B, um segmento $\overline{BJ}$, igual a $\underline{b}$, tal que $\underline{a} > \underline{b}$. Um plano qualquer, passando por IJ, corta as perpendiculares ao plano (π), formando um quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ (A_1 correspondendo a A, B_1 a B, C_1 a C e D_1 a D).

(Valor 0,5) 1) Determine a natureza do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ e estabeleça a relação existente entre as razões $\dfrac{\overline{AA_1}}{a}$ e $\dfrac{\overline{BB_1}}{b}$.

(Valor 0,5) 2) Supondo as razões iguais a k e $\overline{AB}$ igual a unidade, calcule os lados e as diagonais do quadrilátero em função de k, a e b.

SOLUÇÃO



(1) Os planos ABB_1A_1 e CDD_1C_1 são paralelos $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1B_1 \,//\, C_1D_1$

Os planos ADD_1A_1 e BCC_1B_1 são paralelos $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1D_1 \,//\, B_1C_1$.

Então, $A_1B_1C_1D_1$ é paralelogramo.

Do paralelismo:

$\Delta\, AIA_1 \sim \Delta\, BJB_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AA_1}{a} = \dfrac{BB_1}{b}$.

IME – CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 5

$3^{\underline{a}}$ QUESTÃO (Continuação)

(2) Sendo B_1M // AB, no Δ A_1B_1M:

$$\left.\begin{array}{l} B_1M = AB = 1 \\ A_1M = AA_1 - BB_1 = k(a-b) \end{array}\right| \Longrightarrow A_1B_1^2 = 1 + k^2(a-b)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_1B_1 = \sqrt{1 + k^2(a-b)^2} = C_1D_1}$$

Sendo A_1N // AD, no Δ A_1D_1N:

$$\left.\begin{array}{l} A_1N = 1 \\ D_1N = k \cdot A_1N = k \end{array}\right| \Longrightarrow \boxed{A_1D_1 = \sqrt{1+k^2} = B_1C_1}$$

Sendo B_1P // BD, no Δ B_1D_1P:

$$\left.\begin{array}{l} B_1P = BD = \sqrt{2} \\ D_1P = DD_1 - BB_1 = k(a+1) - kb = k(a-b+1) \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{B_1D_1 = \sqrt{2 + k^2(a-b+1)^2}}$$

Sendo C_1Q // AC, no Δ A_1C_1Q:

$$\left.\begin{array}{l} C_1Q = AC = \sqrt{2} \\ A_1Q = CC_1 - AA_1 = k(b+1) - ka = k(b-a+1) \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_1C_1 = \sqrt{2 + k^2\,(b-a+1)^2}}$$

IME – CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 7

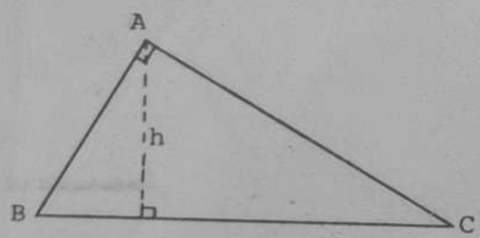
$4^{\underline{a}}$ QUESTÃO — VALOR 1,0

Seja (T) um triângulo retângulo em A, sendo os outros vértices B e C.

(Valor 0,5) 1) Dá-se a razão $m = \frac{2p}{a}$, onde $\underline{a}$ é a hipotenusa e e p o semiperímetro. Indique entre que valores m pode variar para que o problema tenha solução, e calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em função de m.

(Valor 0,5) 2) São dados a hipotenusa $\underline{a}$ de (T) e volume $V = \frac{\pi a^3}{48}$, gerado quando (T) gira em torno da hipotenusa. Calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em graus ou o valor numérico de uma de suas linhas trigonométricas.

SOLUÇÃO



$$(1)\quad M = \frac{2p}{a} = \frac{a+b+c}{a}$$

$$\Longrightarrow m = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

$$\Longrightarrow m - 1 = \text{sen } B + \cos B \quad (\times \tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\Longrightarrow \text{sen}(B + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(m-1) \Longrightarrow$$

$$0 < B < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\pi}{4} < B + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen}(B + \tfrac{\pi}{4}) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}(m-1) \leq 1 \Longrightarrow 1 < m - 1 \leq \sqrt{2} \Longrightarrow \boxed{2 < m \leq \sqrt{2} + 1}$$

Para estes valores de m:

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{B} = \text{arc sen } \dfrac{\sqrt{2}(m-1)}{2} - \dfrac{\pi}{4} \\[2ex] \hat{C} = \dfrac{3\pi}{4} - \text{arc sen } \dfrac{\sqrt{2}(m-1)}{2} \end{array}}$$

(ou "vice-versa")

IME – CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 8

4ª QUESTÃO (Continuação)

(2) $V = \frac{\pi}{3} h^2 a \Longrightarrow \frac{\pi}{3} h^2 a = \frac{\pi a^3}{48} \Longrightarrow h^2 = \frac{a^2}{16} \Longrightarrow \frac{a}{h} = 4$

$\Longrightarrow \text{ctg } B + \text{ctg } C = 4 \Longrightarrow \text{tg } B + \frac{1}{\text{tg } B} = 4 \Longrightarrow \text{tg}^2 B - 4 \text{ tg } B + 1 = 0$

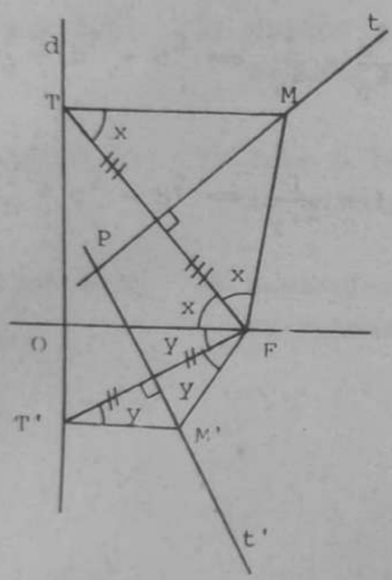
$\Longrightarrow \text{tg } B = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{ccc} \hat{B} = 15^{\circ} & & \hat{B} = 75^{\circ} \\ & \text{ou} & \\ \hat{C} = 75^{\circ} & & \hat{C} = 15^{\circ} \end{array}}$$

IME – CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	Gomes de Souza	FOLHA 9
5ª QUESTÃO ITEM 1			VALOR 0,8

Seja (d) a diretriz e F o foco de uma parábola. Seja $\overline{MM'}$ uma corda focal qualquer. Mostre que as tangentes em M e M' encontram-se em P, pertencente a (d) e que a reta PF é perpendicular a $\overline{MM'}$.

SOLUÇÃO



As tangentes em M e M' são mediatrizes de FT e FT', onde T e T' pertencem a d, e MT e M'T' são perpendiculares a d.

Sendo OF o eixo da parábola:

$MF = MT \Longrightarrow M\hat{F}T = M\hat{T}F = x$

mas $OF \,//\, MT \Longrightarrow O\hat{F}T = M\hat{T}F = x$.

Então, $O\hat{F}T = M\hat{F}T = x$

Da mesma forma, $O\hat{F}T' = M'\hat{F}T' = y$.

M,F,M' são colineares $\Longrightarrow M\hat{F}M' = 180^\circ$

$\Longrightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Longrightarrow x + y = 90^\circ$.

Então, $T\hat{F}T' = x + y = 90^\circ$.

O ponto P é circuncentro do $\triangle$ TFT'; como $T\hat{F}T' = 90^\circ$, então P é ponto médio de TT' ($P \in d$).

Pelo Teorema de Poncelet, PF é bissetriz do ângulo $M\hat{F}M'$.

Como $M\hat{F}M' = 180^\circ$, então $P\hat{F}M = P\hat{F}M' = 90^\circ$.

IME - CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 10
5ª QUESTÃO ITEM 2			VALOR 0,1

Sejam uma elipse (e) e uma hipérbole (h) tendo os mesmos focos e o mesmo eixo não focal. Estabeleça a relação na forma f (ε, ε') = 0, sendo ε e ε' as excentricidades de (e) e (h), respectivamente.

SOLUÇÃO

$$a_e^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{b^2}{c^2} + 1$$

$$a_h^2 = c^2 - b^2 \Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon'^2} = 1 - \frac{b^2}{c^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon'^2} = 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon'^2} = 2 - \frac{1}{\varepsilon^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon'^2} - 2 = 0}$$

IME – CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	Gomes de Souza Ten Cel	FOLHA 11
			VALOR 1,5

6ª QUESTÃO

Em um plano (π) dá-se uma circunferência (c) de centro O e raio r. Por um ponto A pertencente a (c), tira-se a perpendicular a (π) e marca-se $\overline{AV} = x$, V acima de (π).

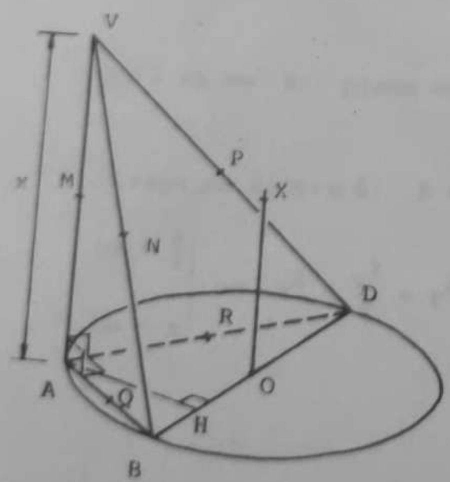
(Valor 0,4) 1) Seja $\overline{BD}$ um diâmetro de (c): mostre que no tetraedro VABD os três pares de retas que ligam os meios das arestas opostas concorrem em um ponto, ponto esse que permanece fixo quando BD gira em torno de O.

(Valor 0,3) 2) Mostre que as arestas opostas de VABD são perpendiculares duas a duas.

(Valor 0,4) 3) Ache o lugar geométrico do pé da altura tirada de V no triângulo VBD, quando $\overline{BD}$ gira em torno de O.

(Valor 0,4) 4) Determine o centro e o raio da esfera circunscrita ao tetraedro VABD em função de r e x.

SOLUÇÃO



1) Sejam M,N,P,Q,R,O, os pontos médios das arestas. Vemos bases médias nos triângulos:

Δ VAD : MP // AD e MP $= \frac{AD}{2}$
Δ ABD : OQ // AD e OQ $= \frac{AD}{2}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ MP // OQ e MP = OQ $\Rightarrow$ MPOQ é paralelogramo $\Longrightarrow$ OM e PQ se cortam ao meio.

Da mesma forma, RMNO é paralelogramo $\Longrightarrow$ OM e NR se cortam ao meio. Então, PQ e NR passam pelo ponto médio de OM, que é fixo (O e M são fixos).

IME – CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA		FOLHA 12

6ª QUESTÃO (Continuação)

2) $VA \perp \pi \Rightarrow VA \perp AB$ e $VA \perp AD$

BD é diâmetro $\Rightarrow B\hat{A}D = 90^\circ$.

Então o tetraedro tem o triedro A tri-retângulo.

$VA \perp ABD \Rightarrow VA \perp BD$

$BA \perp VAD \Rightarrow BA \perp VD$

$DA \perp VAB \Rightarrow DA \perp VB$.

3) Sendo $AH \perp BD$, pelo Teorema das 3 perpendiculares temos que:

$VH \perp BD \Rightarrow$ H é o pé da altura.

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{H}O = 90^\circ \\ \text{A e O fixos} \end{array}\right| \Rightarrow \text{O L.G. de H é o círculo de diâmetro AO.}$$

4) Sendo X o centro da esfera circunscrita, X eqüidista de A,B,D $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ X pertence à reta perpendicular a π, passando por O.

$XV = XA \Rightarrow X \in$ plano mediador de VA (paralelo a π) $\Rightarrow OX = \frac{x}{2}$.

O raio da esfera é: $R = XB$: No Δ OXB:

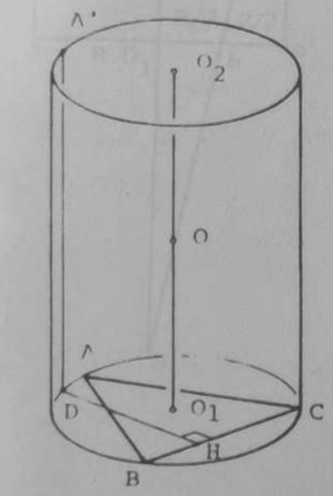
$$\left.\begin{array}{l} OX = \frac{x}{2} \\ OB = r \end{array}\right| \Rightarrow R^2 = \frac{x^2}{4} + r^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{x^2}{4} + r^2}$$

IME – CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	[signature]	FOLHA 13
7^a QUESTÃO			VALOR 1,5

Sejam (k) e (k') os círculos das bases e O o centro do cilindro de raio R e altura h. No círculo (k), inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Um ponto A', pertencente ao círculo (k'), projeta-se paralelamente ao eixo do cilindro, em um ponto D do arco de (k) que subentende BC.

Determine a posição de A' para que a área do triangulo A'BC seja máxima, e nessa posição de A' calcule a distância de O (centro do cilindro) ao plano de A'BC.

SOLUÇÃO

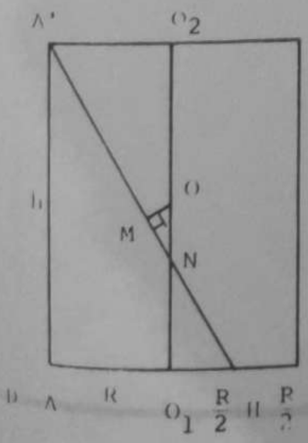


Traçando $DH \perp BC$, temos $AH \perp BC$.

A área de A'BC é $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot A'H$

BC é constante. Então S é máxima quando AH é máximo.

No triângulo retângulo A'DH, A'D é constante. Então, A'H é máximo quando DH é máximo, logo $D \equiv A$.



No Δ A'AH: $A'H = \sqrt{h^2 + \frac{9R^2}{4}}$

$\Delta HO_1N \sim \Delta HAA' \Longrightarrow \frac{O_1N}{h} = \frac{R/2}{3R/2} \Longrightarrow O_1N = \frac{h}{3} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow ON = OO_1 - O_1N = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$

$\Delta OMN \sim \Delta HAA' \Longrightarrow \frac{OM}{AH} = \frac{ON}{A'H} \Longrightarrow$

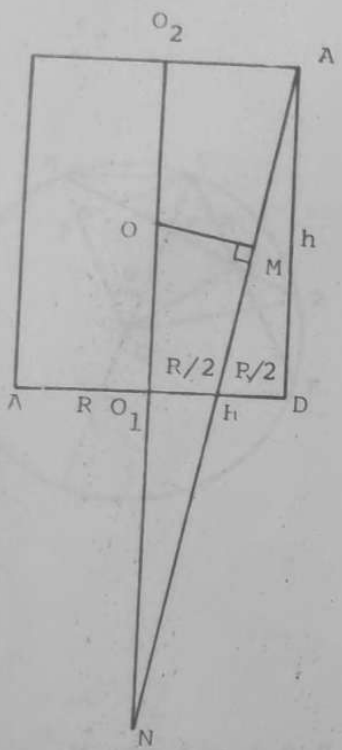
$$\Longrightarrow OM = \frac{\frac{h}{6} \cdot 3R/2}{\sqrt{h^2 + \frac{9R^2}{4}}} = \frac{hR}{4\sqrt{h^2 + \frac{9R^2}{4}}} = \frac{hR}{2\sqrt{4h^2 + 9R^2}}$$

IME – CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	[signature]	FOLHA 14
7ª QUESTÃO			

(Continuação)

OBSERVAÇÃO:

Enunciado não especifica a qual dos arcos que subentendem BC pertence o ponto D. Se considerando que D pertence ao menor arco BC, a área A'BC é máxima quando $\widehat{DB} = \widehat{DC}$.



Neste caso:

No Δ A'HD : $A'H = \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}}$

$\Delta\ HO_1N = \Delta\ HDA' \Longrightarrow O_1N = DA' = h \Longrightarrow$

$\Longrightarrow ON = OO_1 + O_1N = \frac{h}{2} + h = \frac{3h}{2}$

$\Delta\ OMN \sim \Delta\ HDA' \Longrightarrow \frac{OM}{HD} = \frac{ON}{HA'} \Longrightarrow$

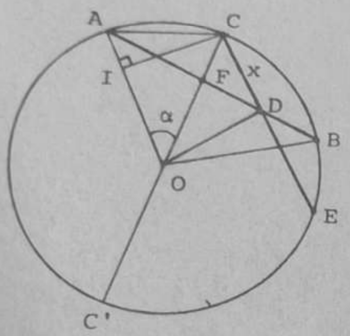
$$\Longrightarrow OM = \frac{\frac{3h}{2} \cdot \frac{R}{2}}{\sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}}} = \frac{3hR}{4\sqrt{h^2+\frac{R^2}{4}}} = \frac{3hR}{2\sqrt{4h^2+R^2}}.$$

IME - CEE 81/82	GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA	Gomes de Souza Ten Cel	FOLHA 15
8ª QUESTÃO			VALOR 1,0

Por um ponto C, ponto médio de um arco $\overset{\frown}{AB}$ qualquer, de uma circunferência (k) de centro O ($\overset{\frown}{AB} < 180^o$), traça-se a corda CDE, paralela ao raio AO (D intercessão de CDE com AB e E pertence a (k)).

Determine o valor do ângulo $A\hat{O}B$ (definido pelo valor numérico de alguma de suas linhas trigonométricas), para que o ponto D seja o ponto médio de CE.

SOLUÇÃO



$$\left.\begin{array}{l}\overline{CD}^2 = \overline{CE} \cdot \overline{CO} \\ \overline{CA}^2 = \overline{CE} \cdot \overline{CC'}\end{array}\right| \Longrightarrow \overline{CA}^2 = 2\,\overline{CD}^2$$

No Δ AIC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IC}^2$$

$$2x^2 = (R - x)^2 + (R^2 - x^2)$$

$$2x^2 = R^2 - 2Rx + x^2 + R^2 - x^2$$

$$2x^2 = 2R^2 - 2Rx$$

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{x}{R} - 1 = 0$$

$$(\cos \alpha)^2 + \cos \alpha - 1 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 - \sqrt{5}$$

$$\boxed{\cos A\hat{O}B = 2 - \sqrt{5}}$$