1ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1)

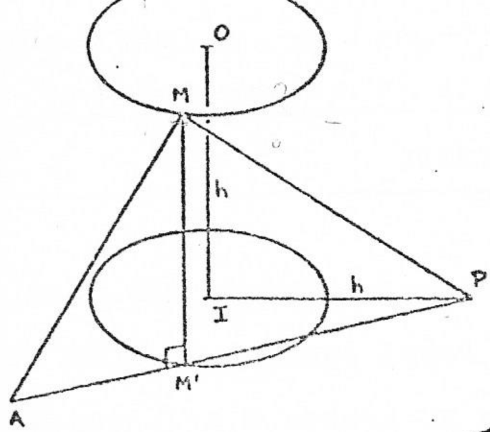
ENUNCIADO: Seja (c) um círculo de raio r, distante h de um plano (π), I o traço nesse plano do eixo (Δ) do círculo (isto é, a perpendicular ao plano de (c) pelo centro de (c)), e P um ponto fixo de (π) distante h de I. Liga-se P a um ponto M, móvel, que percorre toda a circunferência de (c), e define-se um plano (σ) variável, normal a (π), que conterá sempre PM. Na interseção de (σ) com (π) existem dois pontos distantes $h\sqrt{3}$ de M. Seja A aquele cuja distância a P é a maior.

Determine:

a) O lugar geométrico de A quando M percorre toda a circunferência de (c);

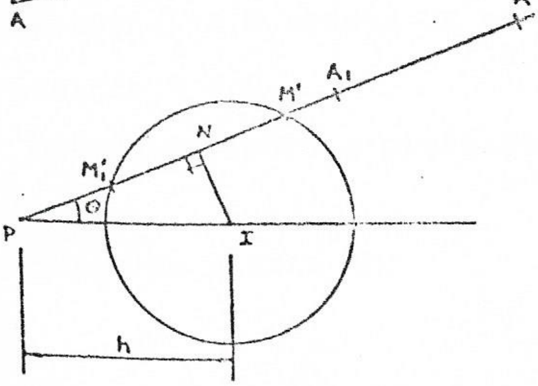
b) O máximo valor de IA.

SOLUÇÃO



(a) No Δ MM'A:

$$\left.\begin{array}{l} MM' = h \\ MA = h\sqrt{3} \end{array}\right| \Longrightarrow M'A = h\sqrt{2}$$



$M'A = M'_1A_1 = h\sqrt{2}$

1) Se h > r:

Podemos calcular PA e PA_1 em função de θ (equações polares):

$$\Delta\ PNI;\ \left.\begin{array}{l} \hat{P} = \theta \\ PI = h \end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} IN = h\ .\ \text{sen}\ \theta \\ PN = h\ .\ \cos\theta \end{array}\right.$$

$$\Delta\ INM':\ \left.\begin{array}{l} IN = h\ .\ \text{sen}\ \theta \\ IM' = r \end{array}\right| \Longrightarrow$$

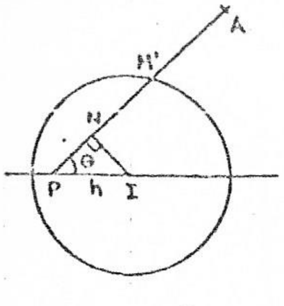
$$\Longrightarrow NM' = NM'_1 = \sqrt{r^2 - h^2\ .\ \text{sen}^2\theta}$$

Então:

$$PA = PN + NM' + M'A = h.\cos\theta + \sqrt{r^2 - h^2.\text{sen}^2\theta} + h\sqrt{2}$$

$$PA_1 = PN - NM'_1 + M'_1A_1 = h.\cos\theta - \sqrt{r^2 - h^2.\text{sen}^2\theta} + h\sqrt{2},$$

onde $\text{arc sen}\left(-\frac{r}{h}\right) \le \theta \le \text{arc sen}\left(\frac{r}{h}\right)$.



$M'A = h\sqrt{2}$

(2) Se $h < r$:

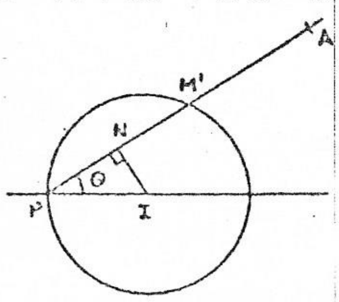
Δ PNI: $\left.\begin{array}{l}\hat{P} = \theta \\ PI = h\end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}IN = h.\text{sen}\,\theta \\ PN = h.\cos\theta\end{array}\right.$

Δ INM': $\left.\begin{array}{l}IN = h.\text{sen}\,\theta \\ IM' = r\end{array}\right| \Longrightarrow$

$\Longrightarrow NM' = \sqrt{r^2 - h^2.\text{sen}^2\theta}$

Então:

$PA = PN + NM' + M'A = h.\cos\theta + \sqrt{r^2 - h^2.\text{sen}^2\theta} + h\sqrt{2}.$



$M'A = r\sqrt{2}$

(3) Se $h = r$:

Quando M é tal que $PM \perp (\pi)$, fica indeterminado o plano (σ). Consideramos então as outras posições de M.

Δ PNI. $PN = r.\cos\theta$

Então

$PA = PM' + M'A = 2r.\cos\theta + r\sqrt{2},$

onde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$

(b) No Δ IM'A: $IA < IM' + M'A$.

IA é máximo quando I, M', A, são colineares $\Longrightarrow IA = r + h\sqrt{2}$

2ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

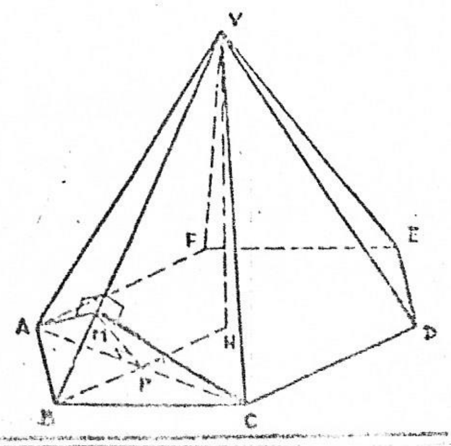
ENUNCIADO: Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base A B C D E F, de lado da base igual a b e altura igual a $\frac{3b}{2}$, traça-se o plano perpendicular à aresta VB no ponto M, tal que este plano contenha os vértices A e C.

Determine, para a pirâmide de vértice M e base ABC, assim formada:

a) O comprimento da aresta AM;

b) O volume.

SOLUÇÃO



Δ BMP ~ Δ BHV

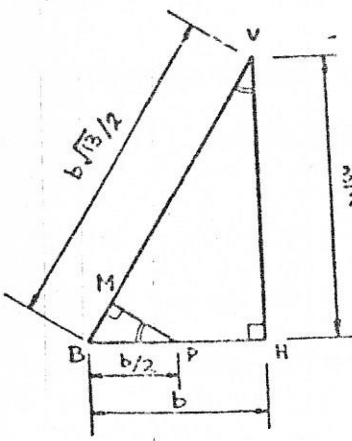
$\Longrightarrow \frac{MP}{VH} = \frac{PB}{VB} = \frac{MB}{BH}$

$\Longrightarrow \frac{MP}{3b/2} = \frac{b/2}{b\sqrt{13}/2} = \frac{MB}{b}$

$\Longrightarrow MP = \frac{3b}{2\sqrt{13}}; \quad MB = \frac{b}{\sqrt{13}}$

Δ AMP:

$AM^2 = \frac{9b^2}{52} + \frac{3b^2}{4} \Longrightarrow \boxed{AM = \frac{2b\sqrt{39}}{13}}$



Área de ~~ABC~~ ΔMC

$$S = \frac{AC \cdot MP}{2} = \frac{b\sqrt{3} \cdot \frac{3b}{2\sqrt{13}}}{2}$$

$$S = \frac{3b^2\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}$$

Volume de MABC

$$V = \frac{S \cdot MB}{3}$$

$$V = \frac{\frac{3b^2\sqrt{3}}{4\sqrt{13}} \cdot \frac{b}{\sqrt{13}}}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{b^3\sqrt{3}}{52}}$$

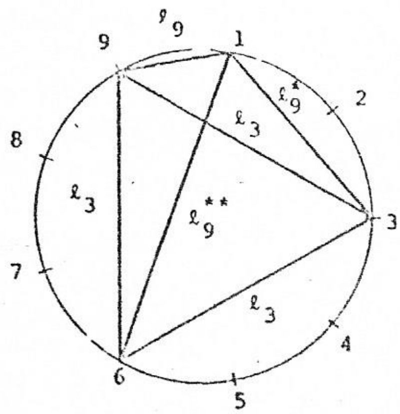
3ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Sejam ℓ_9 o lado do eneágono regular convexo, ℓ_9^* e ℓ_9^{**} os lados dos eneágonos estrelados ($\ell_9^* < \ell_9^{**}$), todos inscritos em um círculo de raio r.

Mostre que:

$$\ell_9 = \ell_9^{**} - \ell_9^*$$

SOLUÇÃO



1ª SOLUÇÃO

$$\ell_9 = 2R \operatorname{sen} \frac{\pi}{9}$$

$$\ell_9^* = 2R \operatorname{sen} \frac{2\pi}{9}$$

$$\ell_9^{**} = 2R \operatorname{sen} \frac{4\pi}{9}$$

$$\ell_9^{**} - \ell_9^* = 2R \left[\operatorname{sen} \frac{4\pi}{9} - \operatorname{sen} \frac{2\pi}{9}\right] =$$

$$= 2R \cdot \cancel{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{9} \cdot \cancel{\cos \frac{3\pi}{9}} =$$

$$= 2R \operatorname{sen} \frac{\pi}{9} -$$

$$= \ell_9$$

2ª SOLUÇÃO

Por HIPARCO

$$\cancel{\ell_3} \cdot \ell_9^{**} = \cancel{\ell_3} \cdot \ell_9^* + \cancel{\ell_3} \cdot \ell_9$$

$$\Longrightarrow \ell_9 = \ell_9^{**} - \ell_9^*$$

4ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Determine todos os valores de x, y e z, situados no intervalo fechado $[0,\pi]$, satisfazendo ao sistema:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2y &= 0 \\ \cos y + \cos 2z &= 0 \\ \cos z + \cos 2x &= 0 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO

JUSTIFICATIVA

$\cos a = -\cos(\pi - a)$

$\cos a = -\cos(\pi + a)$

ou

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

e $\cos \pi = 0$

+ + + − + +
+ + − − + −
+ − + − − +
+ − − − − −

$$\cos x + \cos 2y = 0 \Longrightarrow \cos 2y = -\cos x \Longrightarrow \begin{cases} 2y + x = \pi \\ 2y - x = \pi \end{cases}$$

$$\cos y + \cos 2z = 0 \Longrightarrow \cos 2z = -\cos y \Longrightarrow \begin{cases} 2z + y = \pi \\ 2z - y = \pi \end{cases}$$

$$\cos z + \cos 2x = 0 \Longrightarrow \cos 2x = -\cos z \Longrightarrow \begin{cases} 2x + z = \pi \\ 2x - z = \pi \end{cases}$$

Combinando-se as hipóteses, temos os 8 sistemas algébricos abaixo:

1) $\begin{cases} 2y + x = \pi \\ 2z + y = \pi \\ 2x + z = \pi \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3};\quad y = \frac{\pi}{3};\quad z = \frac{\pi}{3}$

2) $\begin{cases} 2y + x = \pi \\ 2z + y = \pi \\ 2x - z = \pi \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{7};\quad y = \frac{\pi}{7};\quad z = \frac{3\pi}{7}$

3) $\begin{cases} 2y + x = \pi \\ 2z - y = \pi \\ 2x + z = \pi \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{7};\quad y = \frac{3\pi}{7};\quad z = \frac{5\pi}{7}$

4) $\begin{cases} 2y - x = \pi \\ 2z + y = \pi \\ 2x + z = \pi \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{7};\quad y = \frac{5\pi}{7};\quad z = \frac{\pi}{7}$

5) $\begin{cases} 2y + x = \pi \\ 2z - y = \pi \\ 2x - z = \pi \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{7\pi}{9};\quad y = \frac{\pi}{9};\quad z = \frac{5\pi}{9}$

6) $\begin{cases} 2y - x = \pi \\ 2z + y = \pi \\ 2x - z = \pi \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{9};\quad y = \frac{7\pi}{9};\quad z = \frac{\pi}{9}$

7) $\begin{cases} 2y - x = \pi \\ 2z - y = \pi \\ 2x + z = \pi \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{9};\quad y = \frac{5\pi}{9};\quad z = \frac{7\pi}{9}.$

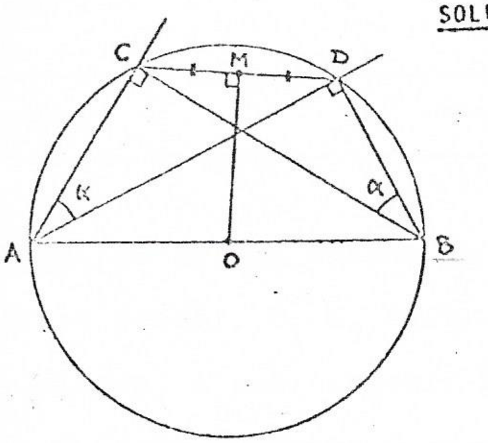
8) $\begin{cases} 2y - x = \pi \\ 2z - y = \pi \\ 2x - z = \pi \end{cases} \Longrightarrow x = \pi;\quad y = \pi;\quad z = \pi$

5ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Um ângulo α de grandeza constante, situado em um plano (π), gira em torno de seu vértice A, que é fixo, permanecendo no plano (π). De um ponto B, fixo, no plano (π), tiram-se perpendiculares BC e BD aos lados do ângulo α.

Determine o lugar geométrico dos pontos C e D. Mostre que CD tem comprimento constante e determine o lugar geométrico do ponto médio de CD.

SOLUÇÃO



i) $A\hat{C}B = A\hat{D}B = 90^\circ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ C e D pertencem ao círculo de diâmetro AB.

ii) Sendo $AB = 2R$, então:

$$\frac{CD}{\text{sen}\,\alpha} = 2R \Longrightarrow CD = 2R\,.\,\text{sen}\,\alpha$$

iii) No Δ OMC:

$$\left.\begin{array}{l} CM = R\ \text{sen}\,\alpha \\ OC = R \end{array}\right| \Longrightarrow OM^2 = R^2 - R^2\,\text{sen}^2\alpha \Longrightarrow OM = R\cos\alpha$$

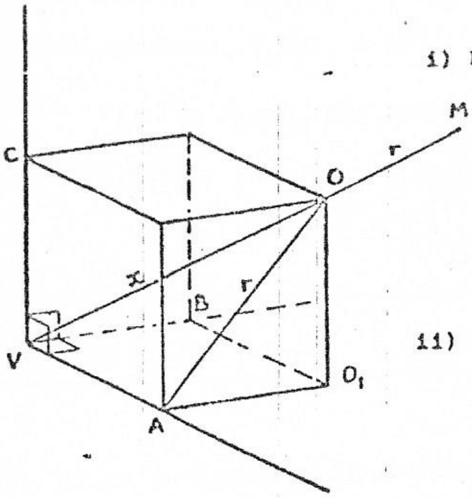
O lugar geométrico de M é o círculo $(O, R\cos\alpha)$.

6ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Uma esfera (ε) de raio r e centro O, tangencia um plano (π) em M. Sobre a reta OM, no mesmo semi-espaço determinado pelo plano (π) em que se acha a esfera (ε), marca-se um ponto V tal que $VO = x > r$, e traçam-se 3 retas, partindo de V, que tangenciam a esfera em A, B e C, sendo $A\hat{V}B = B\hat{V}C = C\hat{V}A = \frac{\pi}{2}$.

Calcule x em função de r e determine, também em função de r, as dimensões da calota seccionada na esfera pelo plano VAB (isto é: o raio da base da calota e sua altura).

SOLUÇÃO



i) No cubo de diagonal OV:

$$\left.\begin{array}{l} r = VA \cdot \sqrt{2} \\ x = VA \cdot \sqrt{3} \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \frac{r\sqrt{6}}{2}}$$

ii) O círculo base da calota tem.

- centro O_1
- raio $O_1A = VA = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

A altura da calota é:

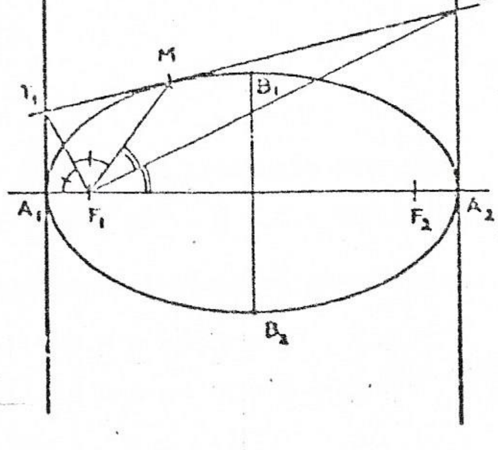
$$h = r - OO_1 = r - \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{2})$$

7ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Dá-se uma elípse de vértices A_1 e A_2, definida por: $A_1A_2 = 2a$ (eixo focal), $B_1B_2 = 2b$ (eixo não focal). Sejam F_1 e F_2 os focos da elípse, e uma tangente à elípse em um ponto M qualquer ($M \neq A_1$ e $M \neq A_2$). Esta tangente é cortada nos pontos T_1 e T_2, respectivamente, pelas tangentes à elípse nos vértices A_1 e A_2.

Mostre que o quadrilátero $T_1F_1F_2T_2$ é inscritível e que o produto $A_1T_1 \cdot A_2T_2$ é constante.

SOLUÇÃO



Seja $F_1F_2 = 2c$

i) PONCELET:

- F_1T_1 é bissetriz do ângulo A_1F_1M
- F_1T_2 é bissetriz do ângulo A_2F_1M

Então:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\hat{F}_1T_1 = T_1\hat{F}_1M = x \\ M\hat{F}_1T_2 = T_2\hat{F}_1A_2 = y \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2x + 2y = 180^\circ$$

Finalmente: $T_1\hat{F}_1T_2 = x + y = 90^\circ$
Analogamente: $T_1\hat{F}_2T_2 = 90^\circ$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ T_1, F_1, F_2, T_2 são concíclicos.

ii) $\Delta\, T_1A_1F_1 \sim \Delta\, F_1A_2T_2 \Longrightarrow \dfrac{A_1T_1}{F_1A_2} = \dfrac{F_1A_1}{A_2T_2} \Longrightarrow A_1T_1 \times A_2T_2 = F_1A_1 \times F_1A_2 =$

$= (a - c)(a + c) = a^2 - c^2 = b^2$

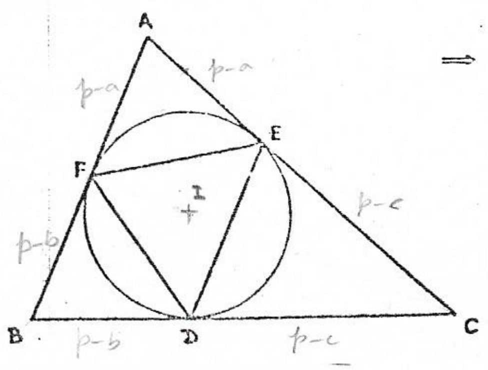
8ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Dado o triângulo escaleno ABC, sejam respectivamente D, E, F os pontos de contato do círculo inscrito ao triângulo ABC, com os lados BC, AC e AB.

Mostre que os triângulos ABC e DEF não são semelhantes, e estabeleça a relação $\dfrac{EF}{BC}$ em função de $\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}$ e $\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}$.

SOLUÇÃO

$\dfrac{B+C}{2} = \dfrac{180-A}{2}$



$6p-4p=2p$

$AE = AF = p - a$

$\Longrightarrow$ $EF = 2(p-a)\operatorname{sen}\dfrac{A}{2} =$

$= (b + c - a)\operatorname{sen}\dfrac{A}{2} =$

$= 2R(\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A)\operatorname{sen}\dfrac{A}{2} =$

$= 4R(\operatorname{sen}\dfrac{B+C}{2}\cdot\cos\dfrac{B-C}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2})\cdot\operatorname{sen}\dfrac{A}{2} =$

$= 2R(\cos\dfrac{B-C}{2} - \cos\dfrac{B+C}{2})\cdot\operatorname{sen} A =$

$= 2a.\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{\dfrac{EF}{BC} = 2\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}}$

Os ângulos do triângulo DEF são:

$D = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$; $E = 90^\circ - \dfrac{B}{2}$; $F = 90^\circ - \dfrac{C}{2}$

CONSIDERAMOS AD BISS. INTERNA do Δ AEF e DF, EXTERNA.

Supondo os triângulos semelhantes:

i) $D \neq A \Longrightarrow B = C$
ii) $D = A \Longrightarrow A = B = C$ $\Longrightarrow$ ABSURDO

se $D \neq A \to D = B \to$ impossível $\to B \notin DEF$
ou
$D = C \to$ impossível $\to C \notin DEF$

$\to$ não há semelhança.

se $D = A \to 90 - \dfrac{A}{2} = A \to A = 60$

$E = B \to \Delta$ é equilátero
$E = C \to$ impossível (C teria que $\in$ à circunf. DEF)

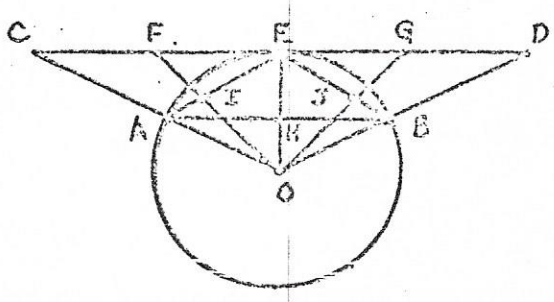
9ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Considere a sucessão:

$$\mathbb{P}_n\ ,\ P_n,\ \mathbb{P}_{2n}\ ,\ P_{2n},\ \mathbb{P}_{4n},\ P_{4n}\ ,\ \mathbb{P}_{8n},\ P_{8n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

na qual $\mathbb{P}_k$ é o semi-perímetro do polígono regular de K lados circunscritos ao círculo unitário, e p_k é o semi-perímetro do polígono regular de K lados inscrito no mesmo círculo.

a) Usando a figura ao lado, estabeleça a fórmula



$$\mathbb{P}_{2n} = \frac{2\,\mathbb{P}_n\ P_n}{\mathbb{P}_n + P_n} \quad (1)$$

b) Calcule o limite da sucessão (1)

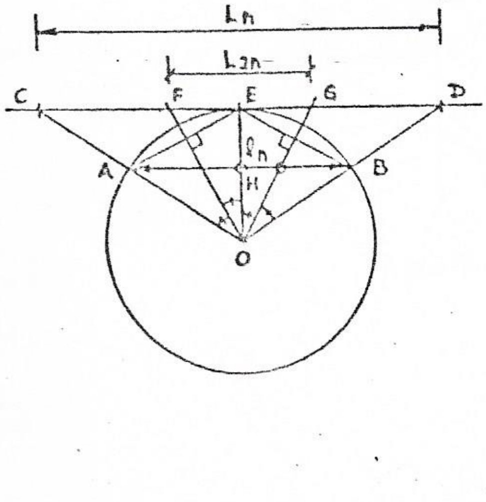
AOB = 1/n da circunferência

OF = bissetriz de $C\hat{O}E$

OG = bissetriz de $D\hat{O}E$

OE = bissetriz de $C\hat{O}D$

SOLUÇÃO



a) $\dfrac{EF}{FC} = \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{OH}{OE} = \dfrac{AB}{CD}$

$$\frac{L_{2n}}{L_n - L_{2n}} = \frac{\ell_n}{L_n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L_n \cdot L_{2n} = \ell_n L_n - \ell_n L_{2n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L_{2n} = \frac{\ell_n L_n}{L_n + \ell_n}\ (\times n) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}_{2n} = \frac{n\ell_n \cdot nL_n}{nL_n + n\ell_n} = \frac{2\ P_n \cdot 2\ \mathbb{P}_n}{2\ \mathbb{P}_n + 2P_n}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}_{2n} = \frac{2\ \mathbb{P}_n \cdot P_n}{\mathbb{P}_n + P_n}$$

b) Quanto $n \to \infty$, o limite de $\mathbb{P}_n$ é π e o limite de p_n é π

Então o limite da sucessão é π.

Teor. do Sanduíche: $\begin{matrix} n\to\infty \\ 2n\to\infty \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2\mathbb{P}_{2n} = 2\pi R \\ 2P_{2n} = 2\pi R \end{matrix} \right.$

$\to R=1 \to 2P_{2n}=2\pi \to P_{2n}=\pi$

10ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Calcule os eixos e a excentricidade da cônica, seção por um plano (π) em um cone de revolução (Γ), de vértice V, sabendo-se:

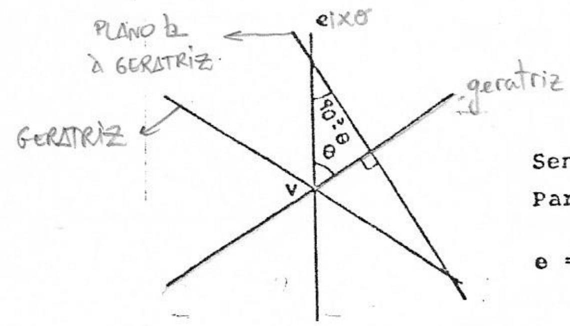
1) A excentricidade da seção por (π) é a maior possível para o cone (Γ);

2) V dista de (π) 6 unidades de comprimento;

3) (Γ) é tal que a seção por um plano perpendicular a uma geratriz é uma hipérbole equilátera.

SOLUÇÃO

$\cos(90-\theta) > \cos\theta \Rightarrow \theta > 90-\theta$



Sendo ~~θ~~ o ângulo da geratriz com o eixo.

Para a hipérbole equilátera:

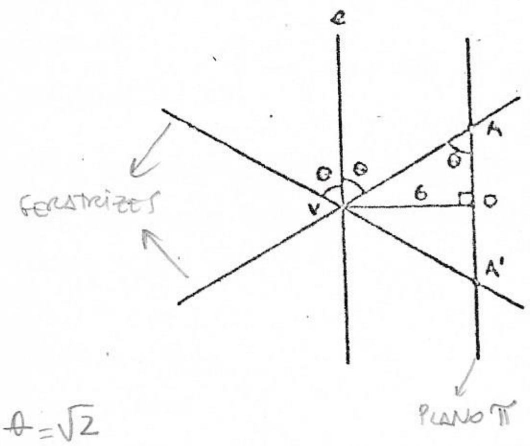
$$e = \frac{\cos(90^\circ - \theta)}{\cos\theta} = \sqrt{2} \Longrightarrow \operatorname{tg}\theta = \sqrt{2}$$

A seção de excentricidade máxima é obtida por um plano paralelo ao eixo.

→ É HIPÉRBOLE ($e>1$)

Δ VOA:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{VO}{OA} \Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{6}{OA} \Longrightarrow OA = 3\sqrt{2}$$



$$\boxed{AA' = 2a = 6\sqrt{2}}$$

A excentricidade é:

$$\boxed{e = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{3} \Longrightarrow c = 3\sqrt{6}$$

Finalmente:

$$b^2 = c^2 - a^2 \Longrightarrow b = 6$$

Então: $\boxed{BB' = 2b = 12}$

$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{2}$

$\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = 1+2 = 3$

$\rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{3}$