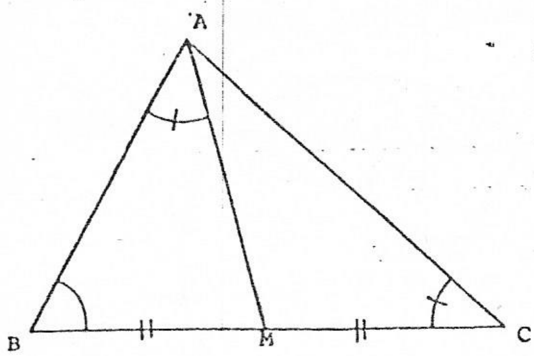
1ª QUESTÃO · ITEM: 1 (VALOR: 0,5)

ENUNCIADO: Seja ABC um triângulo no qual se supõe que a mediana AM é tal que o triângulo ABM é semelhante ao triângulo ABC.

Calcule a razão de semelhança, e determine o lugar geométrico do vértice B supondo A e C fixos.

Solução:



(i) $\Delta ABM \sim \Delta ABC \Longrightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BC}$

Mas $BC = 2BM$. Então:

$\frac{BM}{AB} = \frac{AB}{2BM} \Longrightarrow AB = BM\sqrt{2}$

A razão de semelhança é

$K = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ii) Como A e C são fixos e $\frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o lugar geométrico de B é o círculo de Apolônio traçado sobre AC na razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1ª QUESTÃO ITEM: 2 (VALOR: 0,5)

ENUNCIADO: Seja ABC um triângulo no qual se supõe que a mediana AM é tal que o triângulo ABM é semelhante ao triângulo ABC.

Mostre que o círculo que passa pelos pontos A, C e M tangencia a reta AB.

Solução:

Da semelhança explicitada no item anterior:

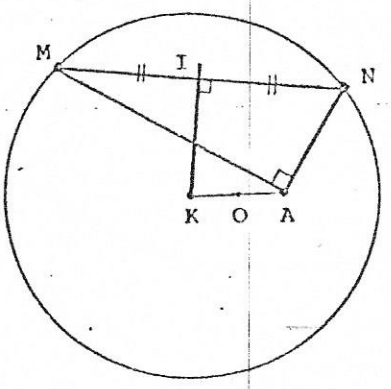
$BA^2 = BM.BC \Longrightarrow$ BA é tangente em A ao círculo que passa por A, C e M.

2ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR:)

ENUNCIADO: São dados um círculo (c) de centro K, raio R em ponto A fixo, tal que $0 < AK < R$. Por A traçam-se duas semi-retas (d) e (d'): (d) corta a circunferência de (c) em M e (d') em N. M e N se deslocam ao longo da circunferência de (c) de modo que AM e são sempre perpendiculares.

Achar o lugar geométrico do ponto médio I do segmento MN.

Solução:



Seja O o ponto médio de AK.

Δ KIA:

$IK^2 + IA^2 = \frac{AK^2}{2} + 2.OI^2$ (1)

O triângulo AMN é retângulo, logo:

IA = IM = IN. Então:

$IK^2 + IA^2 = IK^2 + IN^2 = R^2$ (2)

Substituindo (2) em (1):

$R^2 = \frac{AK^2}{2} + 2.OI^2 \implies OI = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - AK^2}$ = constante.

Então o L.G. de I é o círculo de centro O e raio $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - AK^2}$.

3ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1)

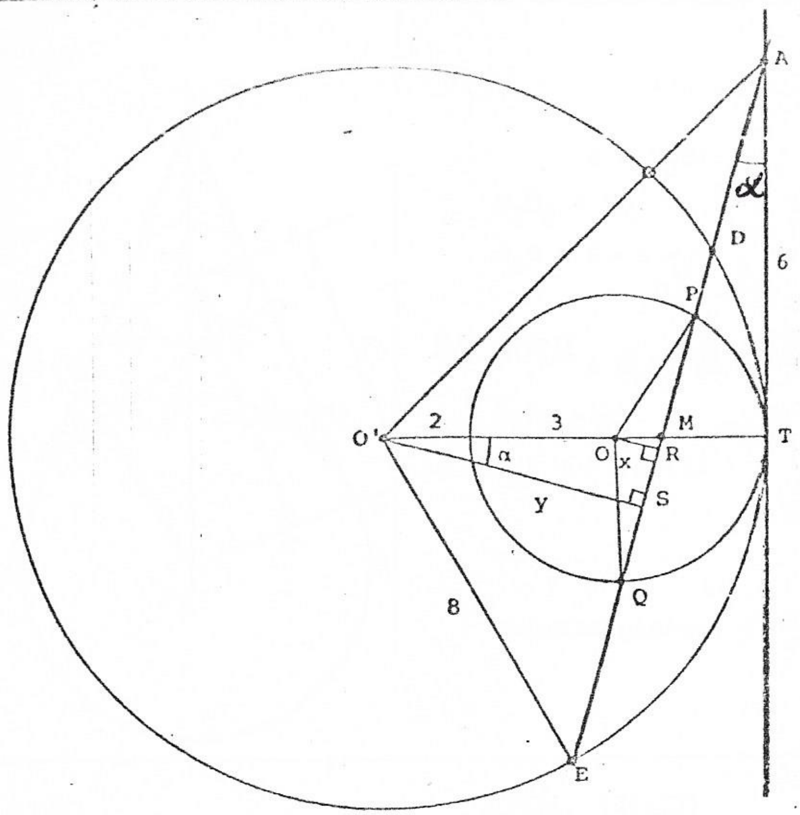
ENUNCIADO: Dão-se duas circunferências de raios 8 e 3, tangentes internas. Pelo ponto T de contato se traça a tangente comum e sobre ela se toma uma distância TA = 6.

Seja (s) uma secante aos círculos que passa por A. (s) faz com TA um ângulo α ($\alpha \neq 0$), e corta a circunferência maior nos pontos D e E e menor nos pontos P e Q.

Calcule α de modo que DE = 2 PQ.

Solução:

$$MT = 6.tg\,\alpha \implies \begin{cases} OM = 3-6.tg\,\alpha = 3(1-2.tg\,\alpha) \\ O'M = 8-6.tg\,\alpha = 2(4-3.tg\,\alpha) \end{cases} \quad (1)$$



De (1), vem:

$x = OM.\cos\alpha = 3(\cos\alpha - 2.\text{sen}\,\alpha)$

$y = O'M.\cos\alpha = 2(4\cos\alpha - 3\,\text{sen}\,\alpha)$

$SE^2 = 4.RQ^2 \implies 8^2 - y^2 = 4.(3^2 - x^2)$

$\implies 64 - 4(4.\cos\alpha - 3\,\text{sen}\,\alpha)^2 = 4\left[9 - 9(\cos\alpha - 2.\text{sen}\,\alpha)^2\right]$

$\implies 34\,\text{sen}^2\alpha = 12\,\text{sen}\,\alpha.\cos\alpha \qquad (\alpha \neq 0)$

$\implies \text{tg}\,\alpha = \frac{6}{17}$

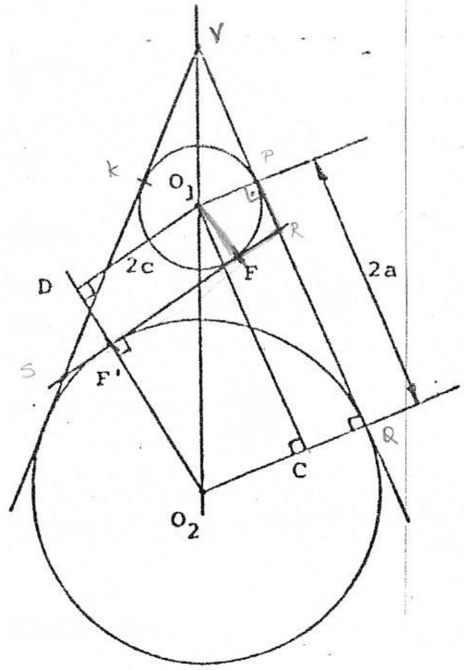
4ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1,5)

ENUNCIADO: São dadas duas esferas (e_1) de centro O_1 e raio 3, e (e_2) de centro O_2 de raio 9. O_1 dista de O_2 de 20. Essas esferas são focais de uma seção elítica (E) de um cone de revolução.

Determine a excentricidade e a distância focal de (E).

OBS.: Esferas focais de uma seção são esferas inscritas num cone que tangenciam o plano seção.

Solução:



$\Delta\ O_1O_2C$:

$O_1O_2 = 20$

$O_2C = 9 - 3 = 6$

$\Longrightarrow (2a)^2 = 400 - 36 = 364$

$\Longrightarrow 2a = 2\sqrt{91}$

$\Delta\ O_1O_2\ D$:

$O_1O_2 = 20$

$O_2D = 9 + 3 = 12$

$\Longrightarrow (2c)^2 = 400 - 144 = 256$

$\Longrightarrow 2c = 16$

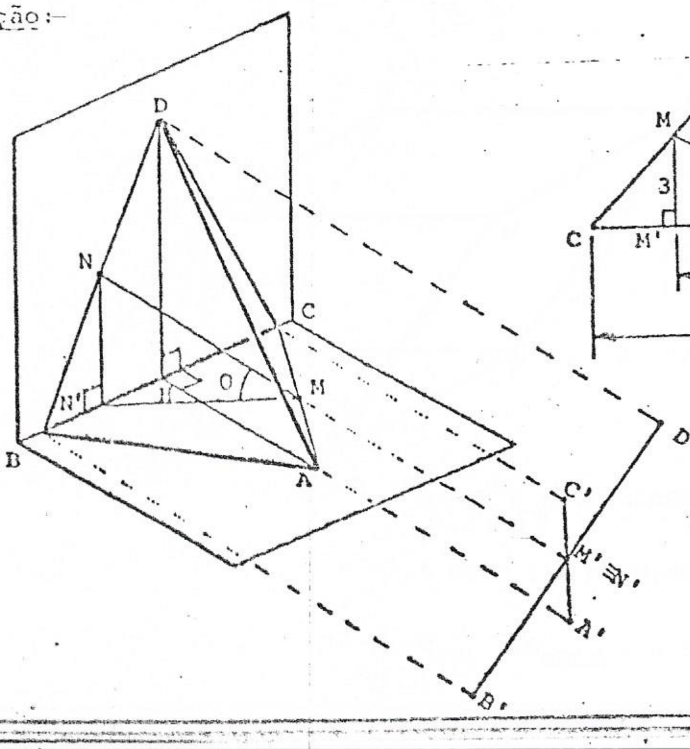
Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{16}{2\sqrt{91}} = \dfrac{8\sqrt{91}}{91}$

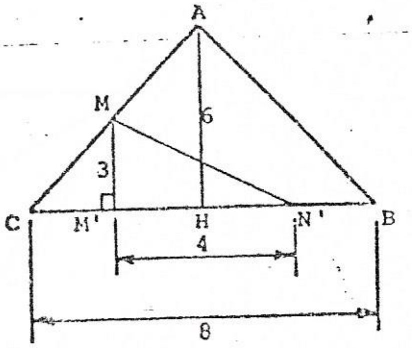
5ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Um quadrilátero reverso ABCD é constituído pela justaposição de dois triângulos isósceles ABC e BCD (AB = AC e DB = DC) cujos planos são perpendiculares e cujas alturas medem, respectivamente, 6 e $6\sqrt{3}$. A base comum dos dois triângulos é BC = 8.

Projeta-se ortogonalmente o quadrilátero ABCD sobre um plano de modo que a projeção seja um paralelogramo (P). Como deve ser feita a projeção e qual é a área do paralelogramo (P)?

Solução:–





Errado

Sendo M e N pontos médios de AC e BD, o plano de projeção é a ⊥ MN.

Δ MM'N':

$$\begin{cases} M'N' = 4 \\ MM' = 3 \end{cases} \Longrightarrow MN' = 5$$

Δ MNN'.

$$\begin{cases} MN' = 5 \\ NN' = 3\sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow MN = 2\sqrt{13}$$

Então $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

Errado

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \operatorname{sen} \theta = 24 \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

Finalmente:

VER R191 Espacial, 2. TEXTO.

$$S_{(P)} = 2 \cdot S_{A'B'C'} = 24 \times \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{72\sqrt{39}}{13}$$

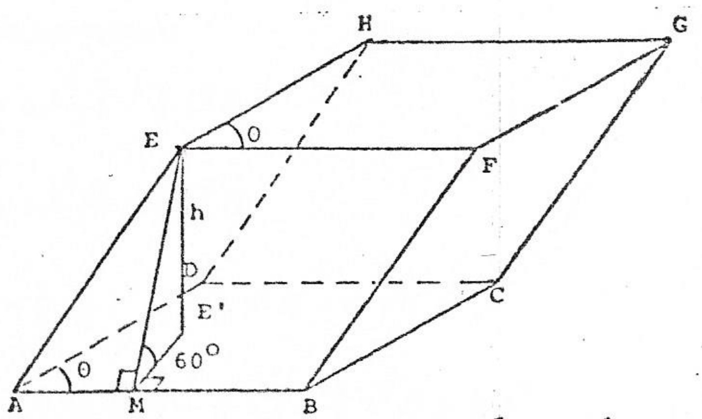
6ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Dá-se um paralelogramo ABCD num plano π e um outro num plano π' de modo que se obtém um paralelepípedo (P) de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, oblíquo, com todas arestas de comprimento a.

O plano que contém os pontos A, E e F forma com π um ângulo de 60°. AEF = 120°.

Calcular em função de a e do ângulo FEH = θ o volume de (P).

Solução:



Δ AEB é equilátero $\Longrightarrow$ $EM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Δ EE'M : $h = EM.\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{4}$

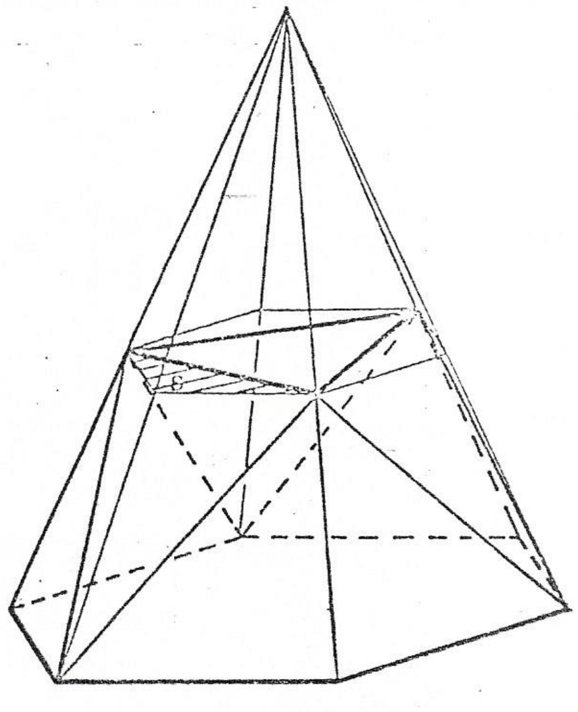
$V_{(P)} = S_{ABCD} \cdot h = a^2.\operatorname{sen} \theta \cdot \dfrac{3a}{4} = \dfrac{3}{4} a^3.\operatorname{sen} \theta$

7ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1,5)

ENUNCIADO: Dá-se um hexágono de lado ℓ num plano π, e num plano π' paralelo a π, um triângulo equilátero de lado ℓ; numa posição tal que cada altura do triângulo é paralela à uma diagonal maior do hexágono. Os baricentros do hexágono e do triângulo estão na mesma perpendicular comum aos seus planos. A distância entre π e π' é ℓ.

Dê, em função de ℓ, o volume do sólido que se obtém quando se liga cada vértice do triângulo aos três vértices mais próximos do hexágono.

Solução:



Admitimos o hexágono regular

No tronco hexagonal:

$$B = 6.\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\,\ell^2\sqrt{3}$$

$$b = 2.\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\,\ell^2\sqrt{3}$$

$$V_{tronco} = \frac{\ell}{3}\left(\frac{3}{2}\,\ell^2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\ell^2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\,\ell^2\right) =$$

$$= \frac{\ell}{3}\left(2\,\ell^2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\,\ell^2\right) = \frac{2}{3}\,\ell^3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\ell^3$$

Em cada pirâmide retirada:

$$S = \frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{12}$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{12} \cdot \ell = \frac{\ell^3\sqrt{3}}{36}$$

O volume procurado é:

$$V = V_{\text{tronco}} - 3\, V_{\text{pirâmide}} =$$

$$= \frac{2}{3}\ell^3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ell^3 - \frac{\ell^3\sqrt{3}}{12} =$$

$$= \frac{7\,\ell^3\sqrt{3}}{12} + \frac{\ell^3}{2} = \frac{\ell^3}{6}\left(\frac{7\sqrt{3}}{2} + 3\right)$$

8ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Determine x na equação $\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\, x = \text{arc tg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

Solução:

$$\text{arc tg}\, x = \alpha \implies \begin{cases} \text{tg}\,\alpha = x \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{arc tg}\,\frac{1-x}{1+x} = \beta \implies \begin{cases} \text{tg}\,\beta = \frac{1-x}{1+x} \\ -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

Da equação, vem, sucessivamente:

$$\alpha = 2\beta \implies \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,2\beta$$

$$\implies x = \frac{2 \cdot \frac{1-x}{1+x}}{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

$$\implies x = \frac{(1-x)(1+x)}{2x}$$

$$\implies x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Substituindo os valores encontrados em (1) e (2) constatamos que apenas $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é solução:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \implies \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ e } \beta = \frac{\pi}{12} \implies \alpha = 2\beta$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \implies \alpha = -\frac{\pi}{6} \text{ e } \beta = \frac{5\pi}{12} \implies \alpha \neq 2\beta$$

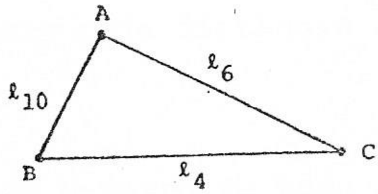
9ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Sejam ℓ_4, ℓ_6 e ℓ_{10} os lados do quadrado, do hexágono e do decágono regulares, inscritos todos no mesmo círculo (C). Com esses três lados constroem-se um triângulo ABC, não inscrito em (C), tal que $BC = \ell_4$, $AC = \ell_6$ e $AB = \ell_{10}$.

Pode-se calcular o ângulo A do triângulo ABC.

Solução:

$$\begin{cases} \ell_4 = R\sqrt{2} \\ \ell_6 = R \\ \ell_{10} = R\,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$



Aplicando-se a lei dos cossenos, vem:

$$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 2.1.\frac{\sqrt{5}-1}{2}.\cos A \implies \cos A = -\frac{1}{2}$$

$$\implies A = 120^\circ.$$