1a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Achar os valores de x que satisfazem a equação:

$$\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = \underbrace{\text{arc sen } (\cos x)}_{y}$$

SOLUÇÃO

Para K=0,1,2,... $\sqrt{\pi^2-4X^2} = \frac{\pi}{2} \pm X + 2K\pi = (2K + \frac{1}{2})\pi \pm X$

que elevando ao quadrado, chega-se à equação

$$5X^2 \pm (4K + 1)\pi X + (4K^2 + 2K - \frac{3}{4})\pi^2 = 0$$

e daí

$$X = \frac{\mp(4K+1)\pi \pm \sqrt{16(1-2K-4K^2)\pi^2}}{10}$$

Verifica-se que só há solução admissível para K=0, então

$$X = \frac{1}{10}(\mp\pi \pm 4\pi) \quad \ldots \quad X_1 = \frac{3\pi}{10}$$

$$X_2 = -\frac{5\pi}{10} = -\frac{\pi}{2}$$

$$X_3 = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$X_4 = -\frac{3\pi}{10}$$

para $x = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0 \rightarrow \cos x = 0$ (V)

para $x = \frac{3\pi}{10} \rightarrow y = \frac{4\pi}{5} \rightarrow \text{sen}\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{10}$ (V)

para $x = -\frac{3\pi}{10} \rightarrow y = \frac{4\pi}{5} \rightarrow \text{sen}\frac{4\pi}{5} = \cos -\frac{3\pi}{10}$ (V)

Obs: Se o aluno "esquecer" o K inicial, ele irá chegar à resposta final evidentemente, porém ele deverá fazer considerações iniciais à respeito de o problema só existir para K=0, o que conceitualmente é o correto fazer essa análise.

2a. QUESTÃO VALOR: 1,5

Seja uma circunferência (C) na qual está inscrito um pentágono regular convexo ABCDE (nesta ordem sobre (C) e no sentido trigonométrico). Considere M o ponto médio do arco AE $< 180^\circ$ e P um ponto qualquer do mesmo arco:

a) Sendo $P \neq M$, $P \neq A$ e $P \neq E$ prove que

$$PA + PE + PC = PB + PD \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

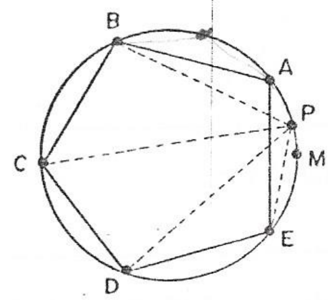
b) Se P coincidir com A mostre o que acontece com a relação (1).

c) Se P coincidir com M, mostre que de (1) pode-se obter uma relação entre o raio da circunferência (C) e os lados dos decágonos regulares inscritos convexo e estrelado.

OBS: As soluções dos três sub-ítens acima são independentes.

SOLUÇÃO

a) Sejam ℓ_5 e ℓ_5^* os lados dos pentágonos regulares inscritos CONVEXO e ESTRELADO. Consideremos os quadriláteros inscritos: PABE PADE PACE



$PA.\ell_5^* + PE.\ell_5 = PB.\ell_5$

$PA.\ell_5 + PE.\ell_5^* = PD.\ell_5$

$PC.\ell_5 = PA.\ell_5^* + PE.\ell_5^*$

que somando e simplificando vem

$PA + PE + PC = PB + PD.$

b) Se P=A...PA=0; $PE=\ell_5=PB$; $PC=\ell_5^*=PD$, obtemos daí a relação trivial $\ell_5+\ell_5^*=\ell_5+\ell_5^*$.

c) Se P=M (ponto médio do arco AE) ... $ME=MA=\ell_{10}$; $MC=2r$ $MB=MD=\ell_{10}^*$, daí a relação torna-se

$2\ell_{10} + 2r = 2\ell_{10}^*$ ou $\ell_{10}^* - \ell_{10} = r$

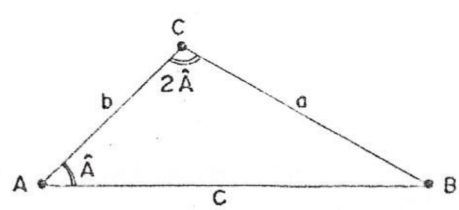
3a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja (T) um triângulo ABC tal que $\hat{C} = 2\hat{A}$

a) Calcule, em função do $\cos\hat{A}$, as excentricidades da elipse e da hipérbole de focos A e B e que passam por C.

b) Supondo-se existir (T), qual a relação de igualdade a que devem satisfazer os lados AB, BC e CA.

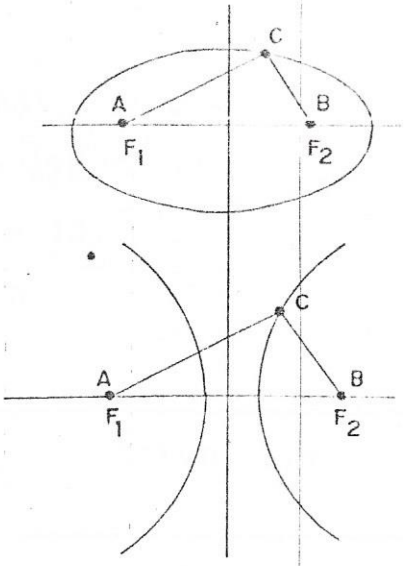
SOLUÇÃO



a) $\hat{C}=2\hat{A}$; $B=\pi-3\hat{A}$

$$e_1 = \frac{AB}{BC+CA} = \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{\operatorname{sen}2\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}3\hat{A}} = \frac{1}{2\cos\hat{A}}$$

$$e_2 = \frac{AB}{|AC-AB|} = \frac{\operatorname{sen}2\hat{A}}{|\operatorname{sen}3\hat{A}-\operatorname{sen}\hat{A}|} = \frac{\cos\hat{A}}{|2\cos^2 A-1|}$$



b) $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}3\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}2\hat{A}}$

e daí

$\cos\hat{A} = \dfrac{c}{2a} \quad \ldots \quad c<2a$

$$\operatorname{sen}^2\hat{A} + \cos^2 A = 1$$

$\operatorname{sen}^2\hat{A} = \dfrac{3a-b}{4a} \quad \ldots \quad b<3a$

$$c^2 = a^2 + ab$$

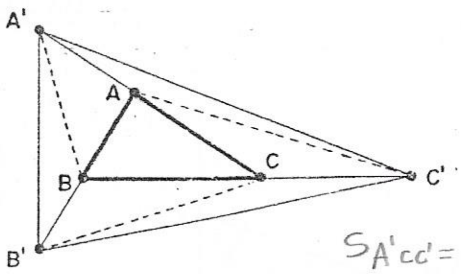
4a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Dado um triângulo ABC de área S, prolongam-se os seus lados CA, AB e BC:

CA, no sentido de C para A, até A', tal que AA' = k.CA;
AB, no sentido de A para B, até B', tal que BB' = k.AB;
BC, no sentido de B para C, até C', tal que CC' = k.BC;
onde k é uma constante positiva. Sendo o triângulo A'B'C' de área S', determine k para que S' = 19S.

SOLUÇÃO

Liguemos AC', CB' e BA' e chamemos BC=a; CC'=Ka
CA=b; AA'=Kb
AB=c; BB'=Kc



$S_{A'cc'} = S_{Acc'} + S_{A'Ac'}$

Entre as áreas temos

K ΔABC = ΔACC' (de mesma altura)
K ΔACC'= ΔA'AC'(de mesma altura)

logo $K^2\Delta ABC = \Delta A'AC'$ e $(K^2+K)\Delta ABC = \Delta A'CC'$ e analogamente

$(K^2+K)\Delta ABC = \Delta B'BC'$
$(K^2+K)\Delta ABC = \Delta A'AB'$

e conclui-se que

$$S' = \Delta A'B'C' = \Delta A'CC' + \Delta B'BC' + \Delta A'AB' + \Delta ABC =$$

$$= (3K^2 + 3K + 1)\Delta ABC = (3K^2 + 3K + 1)S$$

e para que se tenha $S' = 19S \ldots \; 3K^2 + 3K + 1 = 19$

$$K^2 + K - 6 = 0$$

$$K = 2$$

5a. QUESTÃO VALOR: 1,5

Dá-se num plano π um triângulo equilátero ABC de lado "a", $a > 0$, e tira-se por A una semi-reta AX perpendicular ao plano π; seja V a extremidade do segmento AV de comprimento "a", situado nessa semi-reta:

a) Calcule o volume da pirâmide VABC e, caso a mesma admita um plano de simetria, identifique-o.

b) Considere uma reta "r" do plano VBC paralela à reta BC, tal que o plano VBC e o plano determinado por "r" e pelo ponto A sejam perpendiculares.

Sejam D a interseção de "r" com VB e E a interseção de "r" com VC.

Calcule o volume da porção da pirâmide VABC que está compreendida entre os planos ABC e ADE.

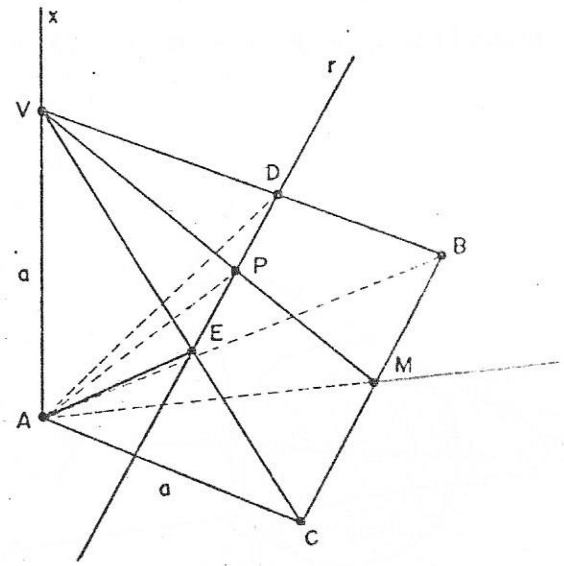
SOLUÇÃO

a) Sendo M o ponto médio de BC, ΔABC equilátero, o plano VAM divide a pirâmide VABC em duas partes iguais e simétricas.

Volume de VABC:

$$AM = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$$

$$V = a.\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,a.\ \frac{1}{2}\ .\ a\ .\ \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}\,a^3$$



b) Cálculo de V_{ABCDE}

$$VM^2 = a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{7}{4}a^2 \ldots \quad VM = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$AP = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{7}}{2}a} = \frac{\sqrt{21}}{7}a$$

$$VP = \sqrt{a^2 - \frac{21}{49}a^2} = \sqrt{\frac{4}{7}a^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}a$$

$$\frac{VM}{VP} = \frac{a}{DE} \ldots \quad DE = a \cdot \frac{\frac{2\sqrt{7}}{7}a}{\frac{\sqrt{7}}{2}a} = \frac{4}{7}a$$

$$V_{VADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}a \cdot \frac{\sqrt{21}}{7}a \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7}a = \frac{4\sqrt{3}}{147}a^3$$

$$V_{ABCDE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{4\sqrt{3}}{147}\right)a^3 = \boxed{\frac{11\sqrt{3}}{196}a^3}$$

$$\frac{33\sqrt{3}}{588}$$

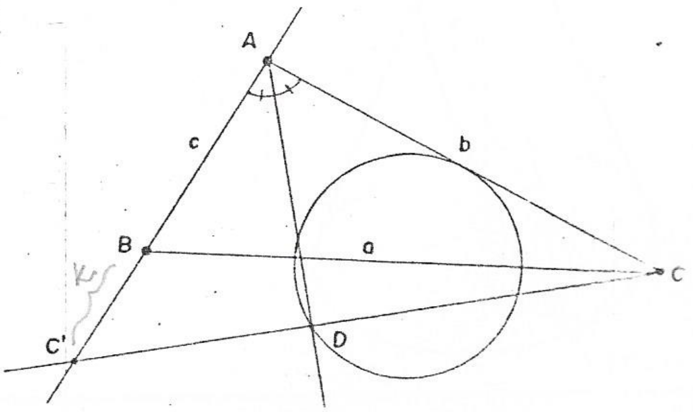
6a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Considere a família de triângulos ABC onde BC = a , AB = c e AC = b. Os pontos B e C são fixos e A varia de posição de tal maneira que b - c = k (constante).

a) Pede-se o lugar geométrico do ponto D, encontro da bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$, com a perpendicular baixada do vértice C àquela bissetriz.

b) Supondo o caso particular $\hat{A} = 60^o$, $a = 4\sqrt{3}$ e $b - c = 4$, calcule os valores em radianos dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

SOLUÇÃO



a) Marquemos AC' = AC = b e daí BC' = b - c = K.
O lugar geométrico de C' é um círculo de centro B e raio K.
CD = DC' pois o ΔACC' é isosceles e AD é bissetriz, me-

diana e altura. Logo D é o "transformado" de C' por uma HOMOTETIA de centro C e razão 1/2. Concluimos que o lugar geométrico de D é o círculo de centro O (ponto médio de BC) e raio K/2.

b) A analogia dos senos dá

$$\frac{\operatorname{sen}A}{a} = \frac{\operatorname{sen}B}{b} = \frac{\operatorname{sen}C}{c} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{C+B}{2} \cdot \cos\frac{C-B}{2}}{b+c} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{B-C}{2} \cdot \cos\frac{B+C}{2}}{b-c}$$

Temos $A=60^\circ$ $a=4\sqrt{3}$ $b-c=4$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{B-C}{2} \cdot \cos\frac{120}{2}}{4} \ \dots \ \operatorname{sen}\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} \ \dots$$

$B-C = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$B+C = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

$0 < \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < \pi$

$B=90^\circ$; $C=30^\circ$

e em radianos $B = \frac{\pi}{2}$ e $C = \frac{\pi}{6}$

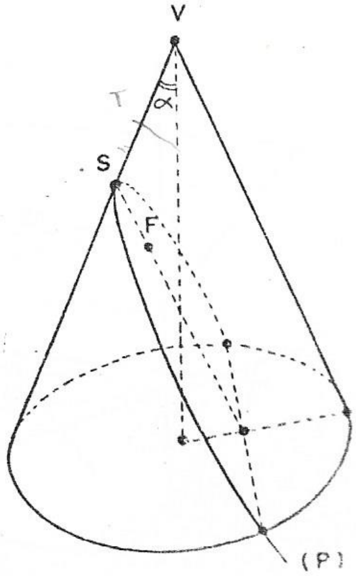
7a. QUESTÃO VALOR: 1,5

Um cone de revolução de vértice V é seccionado por um plano que determina uma secção parabólica (P). Sejam respectivamente S e F o vértice e o foco de (P). São dados: VS = 12 e SF = 3.

a) Determine α (ângulo do eixo do cone com sua geratriz).

b) Determine a área do segmento parabólico compreendido entre a parábola e a corda focal perpendicular ao seu eixo.

SOLUÇÃO



a) Temos $VT = VS-ST = VS-SF = 12-3 = 9$

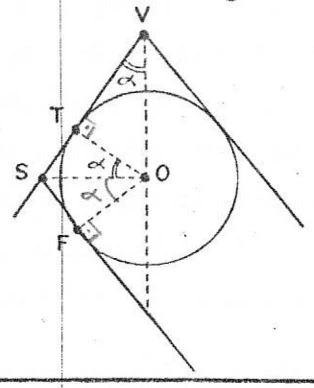
$OT^2 = ST.VT \dots OT = \sqrt{3.9} = 3\sqrt{3}$

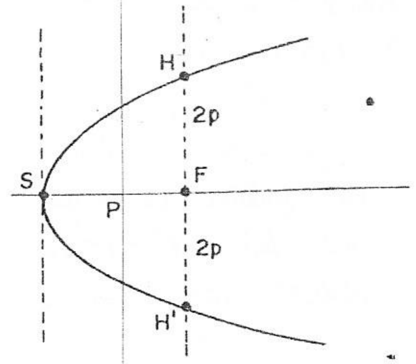
$\tan\alpha = \frac{ST}{OT} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha = 30^\circ$

b) A área é dada por

$$S = \frac{2}{3} \cdot SF.HH' = \frac{2}{3} \cdot 3.12 = 24$$





8a. QUESTÃO VALOR: 1,5

Sejam (C) uma superfície cônica de revolução, de vértice V, cujo semi-ângulo no vértice é 45°, "r" uma reta paralela ao eixo de revolução de (C) e H o plano passando por V e perpendicular a "r". A reta "r" atravessa o plano H em O. VO tem comprimento $2a > a > 0$.

Seja "ℓ" a perpendicular comum a "r" e a uma geratriz "g" de (C); "ℓ" corta "g" em A e "r" em B.

a) A' sendo a projeção ortogonal de A sobre H, ache o lugar do ponto A' quando "g" varia.

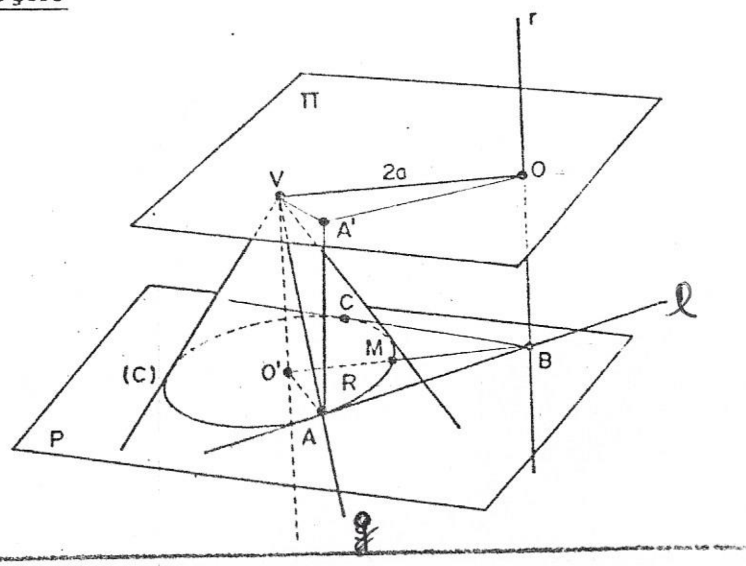
b) Identifique as retas "ℓ" situadas em um plano ρ palalelo a H. Examine o que ocorre quando varia a distância entre os planos H e ρ.

c) Mostre que os pontos A (quando "g" varia) pertencem á uma esfera (e) de centro O.

<u>SOLUÇÃO</u>

a) Seja O' o centro do círculo interseção do plano que contém ℓ e é perpendicular ao eixo de revolução de (C).

O triângulo ΔO'AB reto em A é retângulo, VO é a projeção de O'B (hipotenusa), e portanto o ponto A' gera um círculo de diâmetro igual a



VO, isto é, o "lugar geométrico" de A' é um círculo.

b) O plano ρ é paralelo a π. Quando ρ coincide com π as retas ℓ (são duas tangentes ao círculo interseção de ρ com (C)) coincidem com VO. À medida que ρ se afasta de π as retas ℓ tangenciam o cone até que os pontos de tangência A, e o outro oposto (ou simétrico) que chamaremos de C, ~~xxx~~ coincidam, ambos, com B, formando-se uma única tangente e, a partir daí não há mais retas ℓ. (A superfície traçada pelas retas ℓ se chama "CONOIDE").

c) Quando A=B teremos $VO=OB=2a$ e $O\hat{V}M=45^{o}$ e daí $VO'=OB=O'M=R$ (raio do círculo O') e $AB^2=(R+MB)^2-R^2=4a^2-R^2$, logo $OA^2=R^2+4a^2-R^2=4a^2$, isto é, $OA=2a$, um número fixo, então sobre a superfície de uma esfera (C) de centro O.