1ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1)

ENUNCIADO: De um ponto exterior E a um círculo (O) qualquer traçam-se duas tangentes t e t' a esse círculo, e os pontos de tangência são respectivamente P e P'. O ângulo $P\hat{E}P'$ mede 140^o. De P traça-se a corda PA cujo arco mede 10^o no sentido do maior arco PP' sobre o círculo. De A traça-se a corda AB cujo arco mede 30^o, no mesmo sentido do arco PA. Pede-se:

a) O ângulo $E\hat{P}P'$;

b) O ângulo $B\hat{P}'E$;

c) O número de lados do polígono inscrito no círculo (O) cujo lado é a corda BP.

SOLUÇÃO

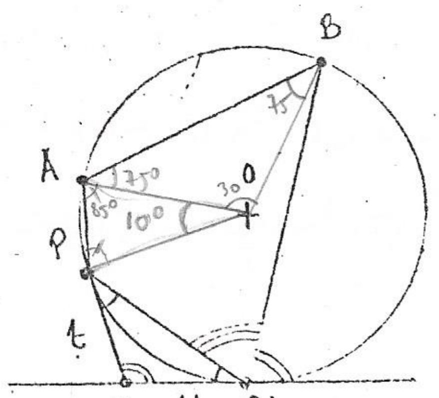
a) $E\hat{P}P' = \dfrac{180-140}{2} = 20^o$

b) $\overline{BP'E} = 180-\{\frac{1}{2}[360-(40+10+30)]+20\}+$

$+ 20 = 40^o$ $\to 180^o - 160 + 20 = 40^o$

c) $\eta = \dfrac{360}{10+30} = 9$

eneágono



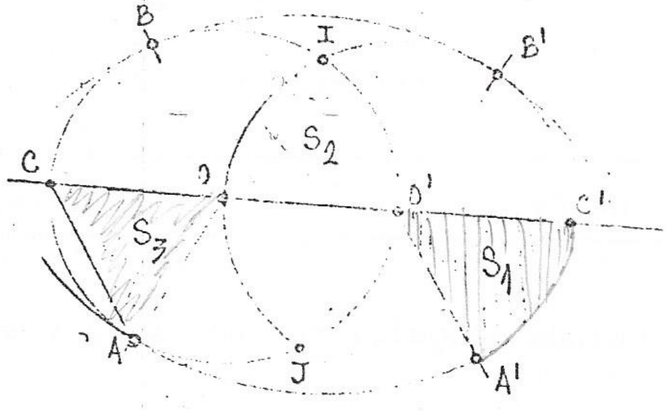
2ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Traçam-se dois círculos de raios r e centros em 0 e 00' (00' = r) que se cortam em I e J. Com centro em I e raio 2r traça-se um arco de círculo que tangencia (0) em A e (0') em A'. Com centro em J e raio 2r traça-se um arco de círculo que tangencia (0) em B e (0') em B'. Em (0) o diâmetro 0'0 tem a outra extremidade em C; em (0') o diâmetro 00' tem a outra extremidade em C'.

Os arcos AA', A'C'B', B'B e BCA foram uma oval com quatro centros.

Pede-se a área desta oval em função de r.

SOLUÇÃO



$$S_1 = \frac{\pi r^2}{6}$$

$$S_2 = \frac{\pi (2r)^2}{6} = \frac{2\pi r^2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$S_{oval} = 2\left(\frac{2\pi r^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2\right) + 4 \times \frac{\pi r^2}{6}$$

$$= 2 \times \frac{8\pi - 3\sqrt{3}}{12} r^2 + \frac{2}{3}\pi r^2 =$$

$$= \frac{8\pi + 4\pi - 3\sqrt{3}}{6} r^2 = \frac{1}{2}(4\pi - \sqrt{3})\, r^2$$

3ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Determine todos os arcos X tais que:

$$\tan 3X = \tan 2X + \tan X$$

SOLUÇÃO

$$\tan 3X = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x . \tan x}$$

$$\tan 2x . \tan x = 0$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$1 - \tan 2x . \tan x = 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2 \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = 0 \\[2ex] \tan x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \tan x = 0$$

$$x = \text{arc tan } 0$$

$$x = K\pi$$

$$K = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

4ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

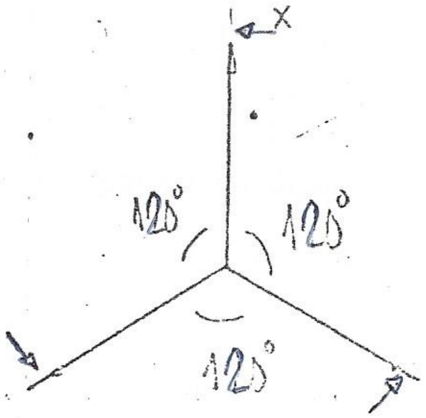
ENUNCIADO: Prove que para todo arco X cada uma das relações abaixo é verdadeira:

$$\text{sen } X + \text{sen } \left(X + \frac{2\pi}{3}\right) + \text{sen } \left(X + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos X + \cos \left(X + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos \left(X + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

4ª QUESTÃO (Continuação) | ITEM: ÚNICO (Continuação) | (VALOR: 1)

SOLUÇÃO



1ª Solução: Ambas operações são verdadeiras porque os três arcos são iguais e defasada de 120° constituindo 3 vetores que se anulam (fasores).

2ª Solução:

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right); \quad \operatorname{sen}\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen} x + \ldots = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \cos x -$$

$$- \operatorname{sen} x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \cos x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$\cos x + \ldots = \cos x - \cos x = 0$$

5ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Seja ABCD um quadrilátero convexo. Traçam-se as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ que se denominam, respectivamente, t_A, t_B, t_C e t_D e que determinam os pontos

$$M = t_A \cap t_B \quad ; \quad N = t_B \cap t_C$$

$$P = t_C \cap t_D \quad ; \quad Q = t_A \cap t_D$$

5ª QUESTÃO (Continuação) | ITEM: ÚNICO (Continuação) | (VALOR: 1)

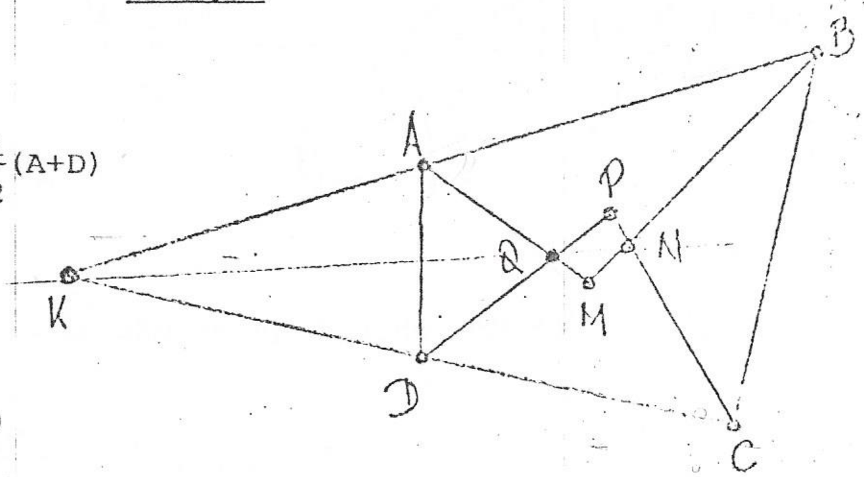
Prove que:

1) O quadrilátero MNPQ é inscritível.

2) As retas AB, CD e NQ são concurrentes em um ponto U, bem como as retas AD, BC e MP em um outro ponto V.

OBS.: $\cap$ significa interseção.

SOLUÇÃO



Temos

$$\hat{Q} = 180-(180 - \frac{A}{2} - \frac{D}{2}) = \frac{1}{2}(A+D)$$

$$\hat{N} = \frac{1}{2}(B+C)$$

$$\hat{Q} + N = \frac{1}{2}(A+B+C+D) = 180$$

logo é inscritível.

Prolongando-se AB e DC tendo um ponto K, e a bissetriz de K contém Q, encontro das bissetrizes de A e D. E também contém N, porque nesse ponto são encontradas bissetrizes de B e C.

Raciocínio análogo para AD, BC e MP.

6ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Sejam A e B dois pontos do espaço que se projetam ortogonalmente sobre um plano π em A' e B'. Dá-se

$$AA' = a \; ; \qquad BB' = b; \qquad A'B' = 2d$$

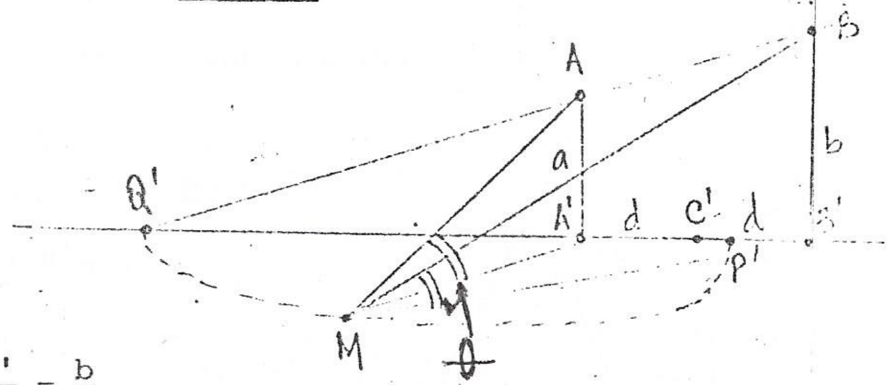
Seja M um ponto de π tal que $A\hat{M}A' = B\hat{M}B'$.

6ª QUESTÃO (Continuação) ITEM: ÚNICO (Continuação) (VALOR: 1)

Ache o lugar geométrico do ponto M e as distâncias a C' (ponto médio de A'B') em função de a, b e d, dos pontos em que o lugar geométrico do ponto M corta a reta que contém o segmento A'B'.

SOLUÇÃO

AM A' = BM B'



$$\tan\theta = \frac{a}{MA'} = \frac{b}{MB'} \therefore \frac{MB'}{MA'} = \frac{b}{a}$$

Logo o L.G. de M é pois o círculo de Apolonius, sobre A'B'.

$$\frac{P'B'}{P'A'} = \frac{b}{a} \; ... \; b \; a$$

$$\frac{2d - A'P'}{A'P'} = \frac{b}{a} \therefore \frac{2d}{A'P'} = \frac{a+b}{a} \therefore A'P' = \frac{2\,ad}{a+b}$$

$$\frac{Q'B'}{Q'A'} = \frac{b}{a} \therefore \frac{2d + Q'A'}{Q'A'} = \frac{b}{a} \therefore \frac{2d}{Q'A'} = \frac{b-a}{a} \therefore$$

$$Q'A' = \frac{2\,ad}{b-a}$$

7ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Seja (I) um icosaedro regular de aresta a. Secciona-se o icosaedro por todos os planos tais que destaquem de cada vértice de (I) uma pirâmide regular, cujo vértice é um vértice de (I) e cujas arestas laterais são arestas de (I) medindo a/3.

7ª QUESTÃO (Continuação) | ITEM: ÚNICO (Continuação) | (VALOR: 1)

Retiradas estas pirâmides resulta um poliedro (P) do qual se pede:

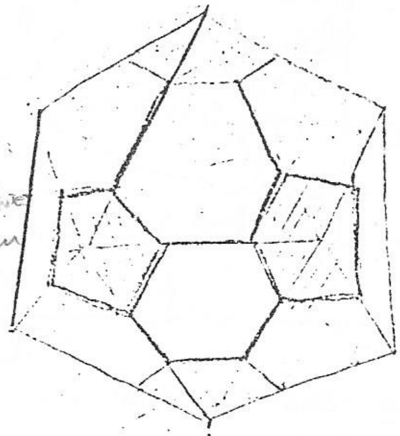
1) Número e natureza de suas faces.

2) Número e natureza de seus ângulos poliedros.

3) Número de suas arestas e de suas diagonais.

SOLUÇÃO

Poliedro de Leonardo da Vinci



$F = 32$

$f_5 = 12$

$f_6 = 20$

$60 + 120 = 2 \cdot A$

$\boxed{A = 90}$

$V + 32 = 92$

$\boxed{V = 60}$

(1) 12 faces pentagonais ✓

20 faces hexagonais ✓

TIRANDO 12 VÉRTICES: FICAM 12 PENTÁGONOS E DE CADA 2 ADJACENTES SOBRAM HEXÁGONOS, UM EM CADA FACE.

(2) 60 triedros ✓

$V_m \cdot m = 2A$

$60 \cdot m = 90 \cdot 2$

$m = 3$

(3) 90 arestas ✓

1440 diagonais ✓

$D = \frac{60 \cdot 59}{2} - 90 - \frac{5(5-3)}{2} \cdot 12 - \frac{6(6-3) \cdot 20}{2}$

$= \boxed{1440 \text{ diagonais}}$

8ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Um cone de revolução tem ângulo de abertura 2α; faz-se uma seção parabólica (determinando uma parábola (P)) por um plano que dista $\underline{d}$ de V, vértice do cone.

Pede-se em função de $\underline{d}$ e $\underline{\alpha}$ o comprimento da corda focal perpendicular ao eixo da parábola (P).

8ª QUESTÃO (Continuação) | ITEM: ÚNICO (Continuação) | (VALOR: 1)

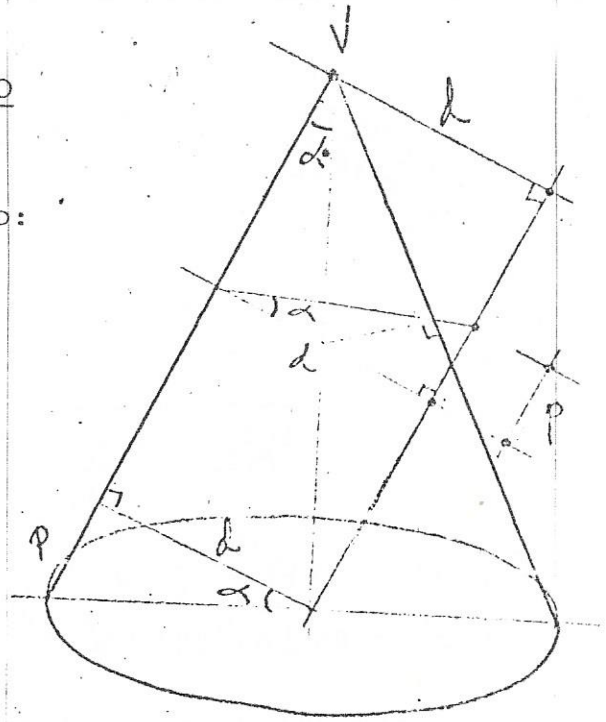
SOLUÇÃO

Podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{P}{d} = \tan\alpha$$

donde $P = d \tan\alpha$

ou $2P = 2d \tan\alpha$



9ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Em um triângulo qualquer ABC são dados: o lado a, a altura h e a bissetriz interna ℓ relativas a esse lado.

Determine os lados b e c assim como os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em função de a, h e ℓ.

SOLUÇÃO

Temos

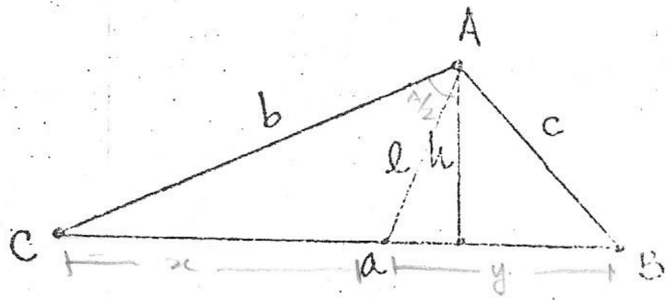
$$\ell = \frac{2bc}{b+c} \cos\frac{A}{2} \quad \text{e}$$

$$h = \frac{bc}{a} \operatorname{sen} A \quad \text{ou} \quad bc = \frac{ah}{\operatorname{sen} A}$$

e para um triângulo qualquer:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A =$$

$$= b^2 + c^2 - 2\,bc\left(2\cos^2\frac{A}{2} - 1\right) =$$



$\frac{x}{b} = \frac{y}{c} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{b}{c} \rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{b+c}{b}$

$\rightarrow x = \frac{ab}{b+c}$ e $y = \frac{ac}{b+c}$

$\rightarrow \frac{b\ell \operatorname{sen} A/2}{2} = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{bc}{a} \frac{\operatorname{sen} A}{2}$

$\rightarrow \ell = \frac{2bc \cos A/2}{b+c}$

9ª QUESTÃO (Continuação) ITEM: ÚNICO (Continuação) (VALOR: 1)

$= (b+c)^2 - 4\,bc\cos^2\frac{A}{2}$

$bc = \frac{ah}{2\,\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$b+c = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{\ell} = \frac{2ah}{2\,\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\ell} = \frac{ah\csc\frac{A}{2}}{\ell}$

daí $bc\cos^2\frac{A}{2} = \frac{ah}{2}\cot\frac{A}{2}$ e

$b+c = \frac{ah}{\ell}\csc\frac{A}{2}$

Logo tiramos a relação $\cot\frac{A}{2} = \frac{\ell^2 \oplus \sqrt{\ell^4 - a^2h^2 + a^2\ell^2}}{ah}$

para $\cot\frac{A}{2} \neq 0$. $\rightarrow$ como $0^\circ < A < 180^\circ$. $\begin{cases} 0^\circ < A < 90^\circ \rightarrow (+) \rightarrow ctg > 0 \\ 90^\circ < A < 180^\circ \rightarrow (+) \rightarrow ctg < 0 \end{cases}$

Tendo-se $\cot\frac{A}{2}$ obtém-se sen A e cos A aplicando as fórmulas:

$$\text{sen } A = \frac{2\cot A/2}{1+\cot^2 A/2}$$

$$\cos A = \frac{\cot^2 A/2 - 1}{\cot^2 A/2 + 1}$$

e daí tem-se A.

Pode-se também obter $\csc^2\frac{A}{2} = 1 + \cot^2\frac{A}{2}$

e daí tem-se b e c no sistema

$$\begin{cases} bc = \dfrac{a\,h}{\text{sen } A} \\ b+c = \dfrac{ah}{\ell}\csc\dfrac{A}{2} \end{cases}$$

$x^2 - \frac{ah}{\ell}x\csc\frac{\hat{A}}{2} + \frac{ah}{\text{sen}\hat{A}} = 0$ raízes: $\underline{\underline{b}}$ e $\underline{\underline{c}}$

e daí os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ para relações

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C$$

onde temos os cos B e cos C e daí os ângulos.

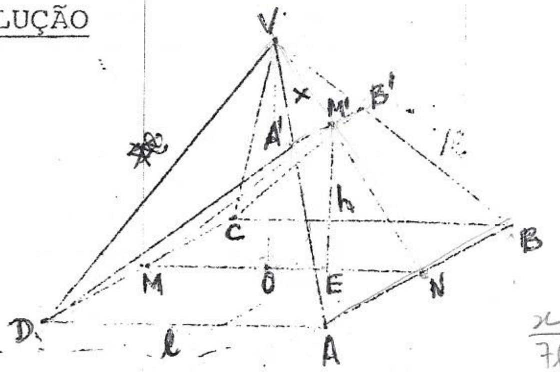
10ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Dá-se uma pirâmide quadrangular regular (P) cujo lado da base mede ℓ, e cujo apótema mede 7ℓ.

Um plano passando por uma das arestas da base divide a área total dessa pirâmide em duas partes equivalentes.

Determine a posição desse plano e o volume do prisma que ele determinou.

SOLUÇÃO



Seja VM' = X, temos

$$S_{VAB} = \frac{7}{2}\ell^2$$

e a área total será

$$S = 4 \cdot \frac{7}{2}\ell^2 + \ell^2 = 15\,\ell^2$$

$\frac{x}{7\ell} = \frac{k}{\ell}$

$x = 7k$

$\to \frac{k \cdot x}{2} = \frac{x^2}{14}$

A área lateral da pirâmide (VA'B'CD)

$$A_{VCD} + V_{CB'} + V_{DA'} + V_{A'B'} = \frac{1}{2}(\ell^2 + 14\,\ell^2) = \frac{15}{2}\ell^2$$

$$V_{CD} = \frac{7}{2}\ell^2 \quad ; \quad V_{A'B'} = \frac{x^2}{14} \quad ; \quad V_{CB'} = \frac{x\ell}{2}\ ?$$

$$\text{daí } \frac{15}{2}\ell^2 = \frac{7}{2}\ell^2 + \frac{x^2}{14} + \frac{2x\ell}{2}$$

$$4\,\ell^2 = \frac{x^2}{14} + x\ell \therefore x^2 + 14\,\ell x - 56\,\ell^2 = 0$$

$\frac{-14\ell \pm \sqrt{196\ell^2 - 4(-56\ell^2)}}{2}$

$\frac{-14\ell \pm \sqrt{420}\,\ell^2}{2}$

$\frac{-14\ell \pm 2\sqrt{105}}{2} \cdot \ell$

Temos ainda $\quad x = \ell(\sqrt{105} - 7)$

$$H^2 = VO^2 = 49\,\ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \therefore H = \frac{\ell}{2}\sqrt{195} \quad \text{e}$$

$$h = H\,\frac{NM'}{NV} = \frac{\ell}{2}\sqrt{195} \cdot \frac{7\ell - x}{7\ell} = \frac{\ell}{14}\sqrt{195}\,(14 - \sqrt{105})$$

Então o volume do tronco de prisma formado (A'B'ABCD) será

$$V = S_{(MM'N)} \cdot \frac{A'B' + AB + CD}{3} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\sqrt{195}}{2} \cdot \frac{(14 - \sqrt{105})}{7}\,\ell^2$$

$$\frac{\frac{\ell}{7}(\sqrt{105} - 7) + \ell + \ell}{3} = \frac{\sqrt{195}}{28}(14 - \sqrt{105})\,\ell^2 \cdot \frac{\ell}{2\pi} \cdot (105 + 7) =$$

$\simeq 1{,}871\,\ell^2 \qquad \simeq 0{,}821\,\ell$

$$\cong \underbrace{0{,}5 \cdot 3{,}75}_{\simeq 1{,}871\,\ell^2} \cdot 0{,}82\,\ell^3 = \boxed{1{,}54\,\ell^3}.$$