1ª QUESTÃO — ITEM ÚNICO — Valor: 1,0

ENUNCIADO: Determine todas as soluções da equação trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} 5x + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$$

SOLUÇÃO

$$2\operatorname{sen}\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$2\operatorname{sen} 7x\cos 2x - \underbrace{(1-2\operatorname{sen}^2 x)}_{\cos 2x} = 0$$

$$\cos 2x[2\operatorname{sen} 7x - 1] = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \rightarrow 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x_1 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\ ; \quad k = 0,1,2,\ldots \\ \operatorname{sen} 7x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 7x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x_2 = \frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{42}\ ; \quad k = 0,1,2,\ldots \\ 7x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow x_3 = \frac{2k\pi}{7} + \frac{5\pi}{42}\ ; \quad k = 0,1,2,\ldots \end{cases} \end{cases}$$

RESPOSTA

$$x_1 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\ ; \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_2 = \frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{42}\ ; \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_3 = \frac{2k\pi}{7} + \frac{5\pi}{42}\ ; \quad k = 0,1,2,\ldots$$

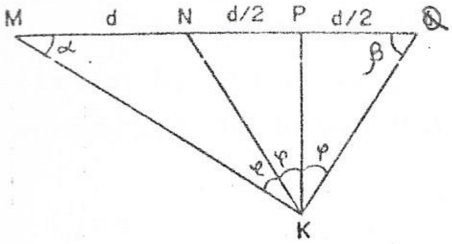
2ª QUESTÃO — ITEM ÚNICO — Valor: 1,0

ENUNCIADO: Seja o segmento de reta $\overline{MQ}$ e os pontos N e P sobre $\overline{MQ}$, na ordem M,N,P,Q. Considere um ponto K não situado sobre a reta suporte de $\overline{MQ}$. Suponha que:

$$\overline{MN} = 2\overline{NP} = 2\overline{PQ} = d \quad , \text{ e }, \quad \widehat{MKN} = \widehat{NKP} = \widehat{PKQ}$$

Determine o valor numérico da relação $\frac{h}{d}$, sendo h a distância do ponto K a reta suporte de $\overline{MQ}$.

SOLUÇÃO



Δ MKN $\dfrac{\text{sen }\gamma}{d} = \dfrac{\text{sen }\alpha}{KN}$ $\therefore$ $\dfrac{\text{sen }\gamma}{\text{sen }2\gamma} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{KP}{KN}$

Δ MKP $\dfrac{\text{sen }2\gamma}{3\,d/2} = \dfrac{\text{sen }\alpha}{KP}$

Δ PKQ $\dfrac{\text{sen }\gamma}{d/2} = \dfrac{\text{sen }\beta}{KP}$

$\dfrac{\text{sen }2\gamma}{\text{sen }\gamma} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{KP}{KN}$ $\quad$ $\dfrac{\text{sen }\gamma}{\text{sen }2\gamma} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{\text{sen }2\gamma}{\text{sen }\gamma} \times \dfrac{1}{2}$

Δ NKQ $\dfrac{\text{sen }2\gamma}{d} = \dfrac{\text{sen }\beta}{KN}$

$\dfrac{\text{sen }\gamma}{2\text{sen}\gamma\cos\gamma} \times 3 = \dfrac{2\text{sen}\gamma\cos\gamma}{\text{sen }\gamma}$ $\quad$ $4\cos^2\gamma = 3$ $\quad$ $\cos\gamma = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\gamma = 30^\circ$

Δ MKQ retângulo $\alpha + \beta = 90^\circ$

$\text{sen }\alpha = \dfrac{KN \times {}^1/_2}{d}$ $\quad$ $\dfrac{\text{sen }\alpha}{\text{sen }\beta} = \dfrac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\alpha = 30^\circ$

$\text{sen }\beta = \dfrac{KN \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{d}$

Logo o Δ MKP é retângulo $KP = h = \dfrac{3d}{2}\tan\alpha = \dfrac{3d}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$h = \sqrt{3} \times \dfrac{d}{2}$

Logo a relação pedida é

$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3ª QUESTÃO $\quad$ Valor: 1,0

ENUNCIADO: Considere um triângulo ABC, tal que

$$\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}$$

<u>ITEM A - (0,5 pontos)</u>

Os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC não são conhecidos, mas é conhecido o valor de m, sendo

$$m = \frac{\overline{AC} + \overline{AB}}{\overline{BC}}$$

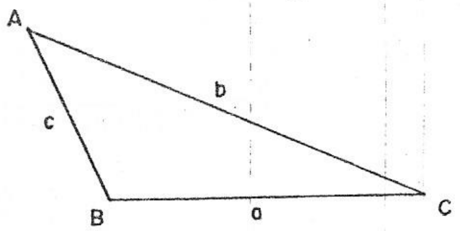
Calcule sen A, sen B e sen C, em função de m.

ITEM B - (0,5 pontos)

Calcule o ângulo que a altura do triângulo ABC, traçada a partir de A, forma com o raio $\overline{OA}$ da circunferência de centro O, circunscrita ao triângulo ABC.

SOLUÇÃO

ITEM A



$$m = \frac{b + c}{a}$$

Pela lei dos senos,

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

então

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b + c}{\text{sen } B + \text{sen } C}$$

mas

$$\text{sen } B + \text{sen } C = 2 \text{ sen } \frac{1}{2} (B + C) \cos \frac{1}{2} (B - C)$$

então

$$\text{sen } B + \text{sen } C = \sqrt{2} \text{ sen } \frac{B + C}{2}$$

mas

$$B + C = 180 - A \qquad \frac{B + C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$$

também

$$\text{sen } (90 - \frac{A}{2}) = \cos \frac{A}{2}$$

então

$$\text{sen } B + \text{sen } C = \sqrt{2} \cos \frac{A}{2}$$

donde

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b + c}{\sqrt{2} \cos \frac{A}{2}}$$

ou

$$\frac{\sqrt{2} \cos \frac{A}{2}}{\text{sen } A} = \frac{b + c}{a} = m$$

elevando ao quadrado,

$$\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\text{sen}^2 A} = \frac{m^2}{2}$$

mas

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$$

donde

$$\frac{1 + \cos A}{1 - \cos^2 A} = m^2$$

ou

$$\frac{1 + \cos A}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)} = m^2$$

simplificando,

$$1 - \cos A = \frac{1}{m^2}$$

ou

$$\cos A = 1 - \frac{1}{m^2}$$

$$\text{sen } A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{\frac{m^4}{m^4} - \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{m^4}} = \frac{\sqrt{2m^2 - 1}}{m^2}$$

ou

$$\boxed{\text{sen } A = \frac{\sqrt{2m^2 - 1}}{m^2}}$$

temos que

$$\text{sen } B + \text{sen } C = 2 \cos \frac{A}{2} \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cos \frac{A}{2}$$

$$\text{sen } B - \text{sen } C = 2 \text{ sen } 45^\circ \text{ sen } \frac{A}{2} = \sqrt{2} \text{ sen } \frac{A}{2}$$

mas

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2m^2 - 1}}{\sqrt{2}\, m} \quad \therefore \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2m^2 - 1}{2\, m^2}$$

$$\text{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{2m^2 - 1}{2\, m^2} = \frac{2m^2 - 2m^2 + 1}{2\, m^2} = \frac{1}{2\, m^2}$$

$$\text{sen } \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2m}$$

Substituindo

$$\text{sen } B + \text{sen } C = \frac{\sqrt{2m^2 - 1}}{m}$$

$$\text{sen } B - \text{Sen } C = \frac{1}{m}$$

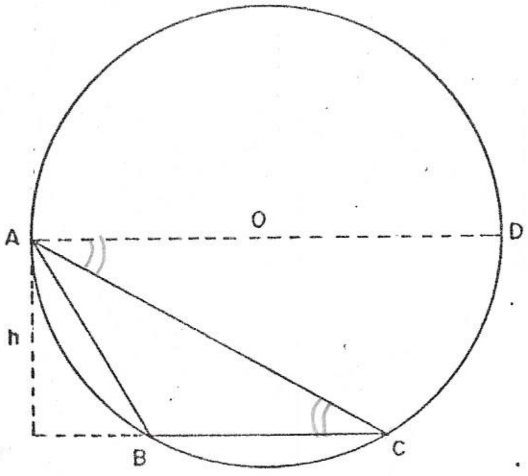
então

$$\boxed{\text{sen } B = \frac{1 + \sqrt{2m^2 - 1}}{2m}}$$

e

$$\boxed{\text{sen } C = \frac{-1 + \sqrt{2m^2 - 1}}{2m}}$$

ITEM B



Circunscrevendo-se uma circunferência ao triângulo ABC, temos

$$B = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}$$

$$C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

mas $B - C = \dfrac{\overset{\frown}{ADC}}{2} - \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = 90^\circ$

então,

$$\overset{\frown}{ADC} - \overset{\frown}{AB} = 180^\circ$$

como, por construção, $\overline{AD} // \overline{BC}$,

vem:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$$

ou

$$\overset{\frown}{ADC} - \overset{\frown}{DC} = 180^\circ$$

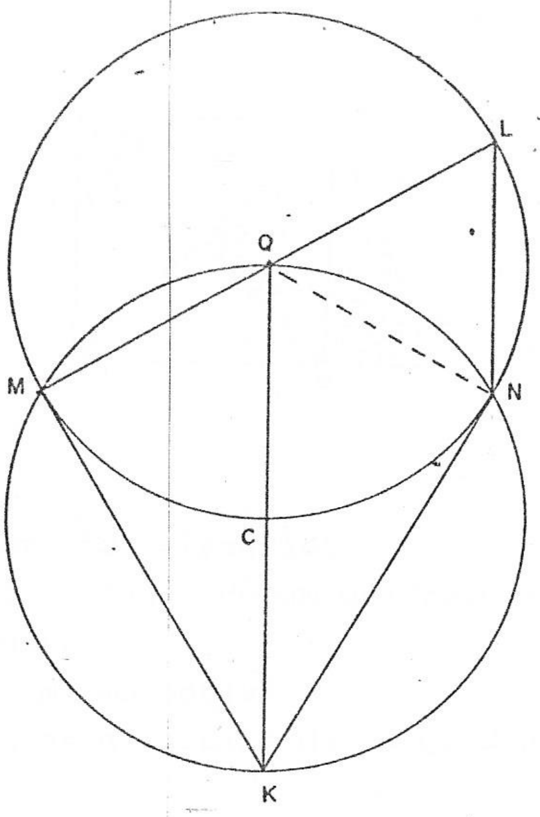
então AD é um diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo. Como a altura (h) é perpendicular ao lado $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ é paralela a $\overline{BC}$, então (h) é perpendicular a $\overline{AD}$, sendo então, perpendicular ao raio $\overline{OA}$.

4ª QUESTÃO | ITEM ÚNICO | Valor: 1,0

ENUNCIADO: A figura abaixo mostra duas circunferências, ambas de raio R, as quais se interceptam nos pontos M e N.

Uma circunferência tem centro em C; a outra tem centro em Q, sendo $\overline{KQ}$ um diâmetro da circunferência de centro C, tal que $\overset{\frown}{MQ} = \overset{\frown}{QN}$.

Calcule a área do quadrilátero KMLN em função de R.



SOLUÇÃO

A área do quadrilátero é igual à soma das áreas do triângulo LQN e do quadrilátero KMQN:

$$S_{KMLN} = S_{KMQN} + S_{LQN} \qquad \ldots (1)$$

Mas, $S_{KMQN} = 2\ S_{KMQ} = 2 \times \dfrac{\overline{MK} \times \overline{MQ}}{2}$ ... (2)

Como, $\overline{MQ} = R \rightarrow \overline{MK} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$. Logo: $S_{KMQN} = R^2\sqrt{3}$ ... (3)

Δ LQN é equilátero $\rightarrow S_{LQN} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ S_{KMQN} = R^2\sqrt{3} + \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}R^2$

5ª QUESTÃO | ITEM ÚNICO | Valor: 1,0

ENUNCIADO: Seja um QUADRADO QACB, de centro I, e um ponto P de posição variável situado sobre a diagonal $\overline{AB}$, tal que $P \neq I$.

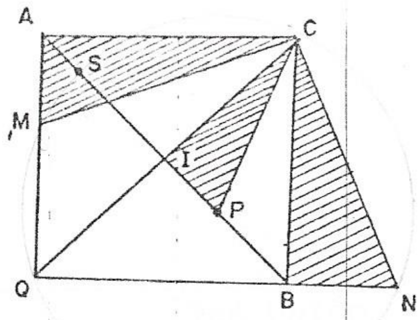
Com centro em P e raio $\overline{PQ}$ traça-se uma circunferência que corta $\overline{QA}$ (ou seu prolongamento) em M e $\overline{QB}$ (ou seu prolongamento) em N.

Considere os triângulos CMA, CNB e CPI e calcule os valores numéricos das relações

$$r_1 = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} \quad , \quad e \quad , \quad r_2 = \frac{\overline{AM}}{\overline{IP}}$$

e do ângulo formado por $\overline{CP}$ e $\overline{MN}$.

SOLUÇÃO



Os três triângulos são retângulos

a) CMA em A, pois os lados de um quadrado formam um ângulo de 90°, quando adjacentes

b) CNB em B, pelo mesmo motivo

c) CPI em I, pois as diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si

$\overline{AC} = \overline{BC}$

Por construção QMCN é inscritível, logo $\hat{M} = \hat{N}$

interno ao Δ ACM

então

Δ CMA = Δ CNB

logo

$\overline{AM} = \overline{BN}$

donde

$$\boxed{r_1 = 1}$$

$$\widehat{IPC} = \widehat{SC} = \frac{\widehat{QC}}{2}$$

mas

$$\hat{N} = \frac{\widehat{QC}}{2}$$

donde

$$\widehat{IPC} = \hat{N}$$

logo

Δ CPI $\sim$ Δ CMA

donde

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{IP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{IC}} = r_2$$

Mas $\overline{AC}$ é um lado do quadrado e $\overline{IC}$ metade de uma diagonal, donde

$$\overline{IC} = \frac{\overline{AC}\sqrt{2}}{2}$$

$$r_2 = \frac{\overline{AC}}{\frac{\overline{AC}\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

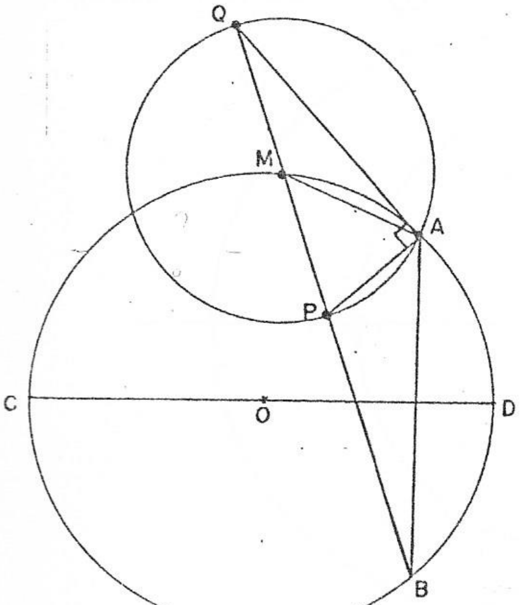
$$\boxed{r_2 = \sqrt{2}}$$

6ª QUESTÃO | ITEM ÚNICO | Valor: 1,0

ENUNCIADO: Considere uma circunferência K de centro O e raio R, e uma corda fixa $\overline{AB}$.

Seja M um ponto variável da circunferência K. Uma reta que passa por B e M corta a circunferência C, de centro em M e raio $\overline{MA}$, nos pontos P e Q.

Determine o LUGAR GEOMÉTRICO de P e Q, quando M descreve a circunferência K.



SOLUÇÃO

1) O $\widehat{AQB}$ sobre C mede $\frac{\widehat{AP}}{2}$.

Temos:

$\widehat{AP} = AMP = AMB = \frac{\widehat{ADB}}{2}$ sobre K

Logo $AQB = \frac{\widehat{ADB}}{4} = \text{const.}$

quando M ε ACB sobre K

Logo AQB sendo const. Q descreve o segmento capaz de $\overline{AB}$ sob o ângulo $\frac{\widehat{ADB}}{4}$.

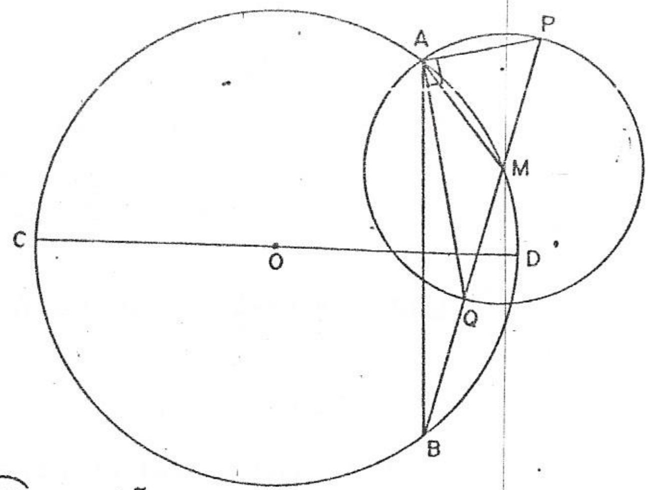
2) $APB = 180 - \widehat{APQ} = 180 - (90 - \widehat{AQB}) = 90 + \widehat{AQB} = 90 + \frac{ADB}{4}$ quando M ε $\widehat{ACB}$ sobre K. P descreve o segmento capaz de $\overline{AB}$ sob o ângulo $90 + \frac{\widehat{ADB}}{4}$.

3) Se M ε $\widehat{ADB}$ temos: $\widehat{AQB} = 180 - \widehat{AQP} = 180 - (90 - \widehat{APB}) = 90 + \widehat{APB} =$
$= 90 + \frac{\widehat{AMQ}}{2} = 90 + \frac{\widehat{ACB}}{4}$

Logo:

$$\widehat{AQB} = 90 + \frac{360 - \widehat{ADB}}{4} = 180 - \frac{\widehat{ADB}}{4}.$$

O ponto Q descreve o segmento capaz de $\overline{AB}$ sob o ângulo $180 - \frac{\widehat{ADB}}{4}$.

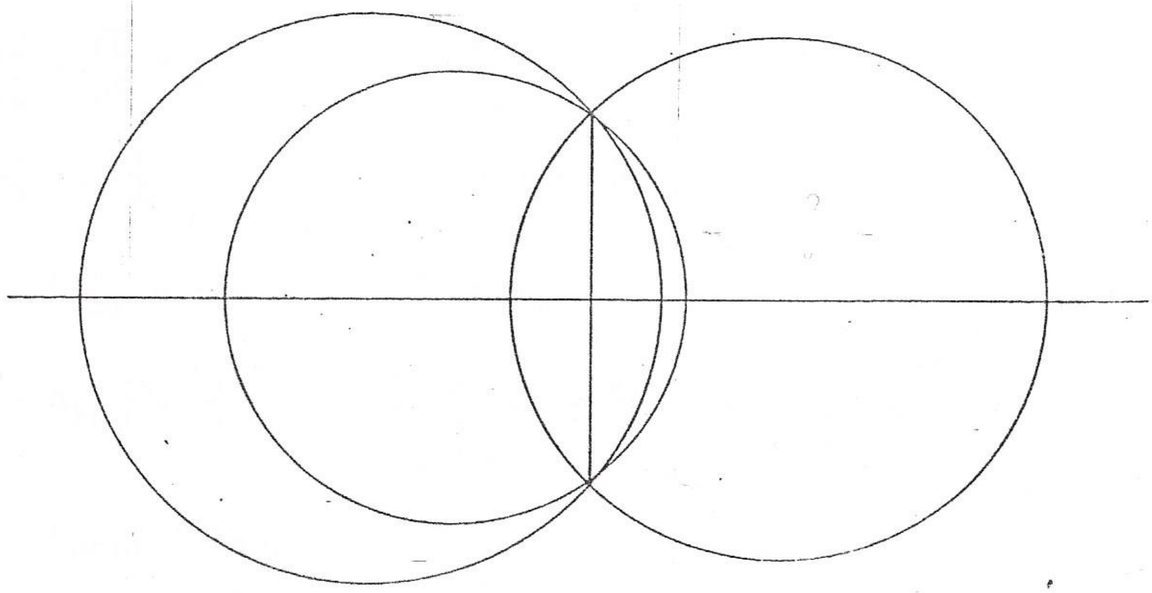


(4) Se M $\in \widehat{ADB}$ então

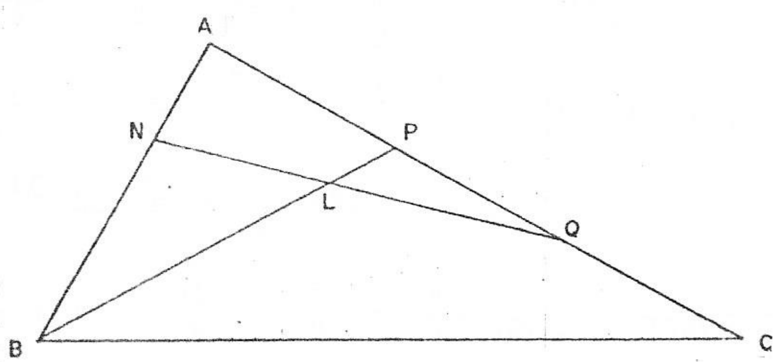
$$APB = \frac{\widehat{AMB}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{4} = 90 - \frac{\widehat{ADB}}{4}$$

P descreve o segmento capaz de $\overline{AB}$ sob o ângulo $90 - \frac{\widehat{ADB}}{4}$.

Observemos que os arcos de (1) e (3) completam uma circunferência, assim com os de (2) e (4).



7ª QUESTÃO | ITEM ÚNICO | Valor: 1,0



Na figura acima é dado um triângulo ABC, retângulo em A, cujos lados têm as seguintes medidas:

$$\overline{AB} = 1$$

$$\overline{BC} = 2$$

Sabe-se que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$

e que $\overline{AN} = \dfrac{\overline{NB}}{2}$

Calcule a área do triângulo LPQ.

SOLUÇÃO

Δ ABP cortado pela transversal NLQ

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LP}} \cdot \frac{\overline{QP}}{\overline{QA}} = 1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore \frac{\overline{LB}}{\overline{LP}} = 4 \rightarrow \overline{LP} = \frac{1}{4}\overline{LB}$$

Δ ANQ cortado por BLP:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BN}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LQ}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}} = 1$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \overline{LN} = \frac{2}{3}\overline{LQ}$$

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$S_{ANQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{6} = S_{ANLP} + S_{BNL} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{9} = S_{ANLP} + S_{PLQ} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{9} = S_{BNL} - S_{PLQ} \qquad \ldots (1)$$

$$S_{BNL} = \frac{\overline{NL} \cdot \overline{BL}}{2} \text{ sen } \alpha = \frac{4\,\overline{LP} \cdot \frac{2}{3}\,\overline{LQ}}{2} \text{ sen } \alpha = \frac{8}{3} S_{PLQ} \qquad \ldots (2)$$

$$S_{PLQ} = \frac{\overline{LP} \cdot \overline{LQ}}{2} \text{ sen } \alpha \qquad \ldots (3)$$

(3) e (2) em (1) $\rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{9} = \dfrac{8}{3} S_{PLQ} - S_{PLQ} = \dfrac{5}{3} S_{PLQ}$

$$S_{PLQ} = \frac{3}{5}\sqrt{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{30}$$

8ª QUESTÃO | ITEM ÚNICO | Valor: 1,0

ENUNCIADO: Considere um cubo K de aresta a. Suponha que L é o ponto em que as diagonais do cubo K se interceptam e que M é o ponto médio de uma aresta do cubo K.

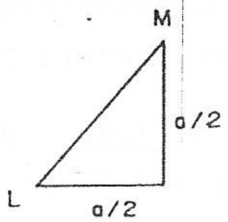
Com centro em L e raio $\overline{LM}$ é construída uma esfera E.

Um plano tangente à esfera E e perpendicular a uma diagonal do cubo K, destaca do cubo K uma pirâmide P.

Calcule o volume da pirâmide P, em função de a.

SOLUÇÃO

Raio da Esfera E:



$$\overline{LM}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \quad \overline{LM} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

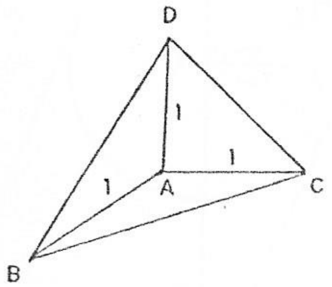
Metade da Diagonal do Cubo: (diagonal d)

$$\frac{d^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \quad \rightarrow \quad d = a\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Altura da Pirâmide Destacada:

$$h = \frac{d}{2} - \overline{LM} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}\,(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Altura de uma Pirâmide de Arestas Laterais Unitárias:
(com triedro triretângulo)



$$V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \times 1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} \ldots \text{(Base ABD, altura } \overline{AC})$$

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{2} \times h' = \frac{1}{6} \ldots \text{(Base BCD, altura h')}$$

$$\therefore \quad h' = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Semelhança entre a Pirâmide Destacada e a de Volume V':

$$\frac{V}{V'} = \frac{h^3}{h'^3} \quad \therefore \quad V = V' \left(\frac{h}{h'}\right)^3$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{6} \times \left[\frac{\frac{a}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \right]^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{8} \cdot \frac{3^3}{3\sqrt{3}} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$$

$$V = \frac{9a^3}{48\sqrt{3}}\,[3\sqrt{3} - 3^2\sqrt{2} + 3 \times 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}]$$

$$V = \frac{9\sqrt{3}\ a^3}{3 \times 48}\,[9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}] \quad \therefore \quad V = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}\,[9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}]$$

9ª QUESTÃO — Valor: 1,0

ENUNCIADO: Considere um CONE DE REVOLUÇÃO, cujo eixo forma com uma geratriz o ângulo α.

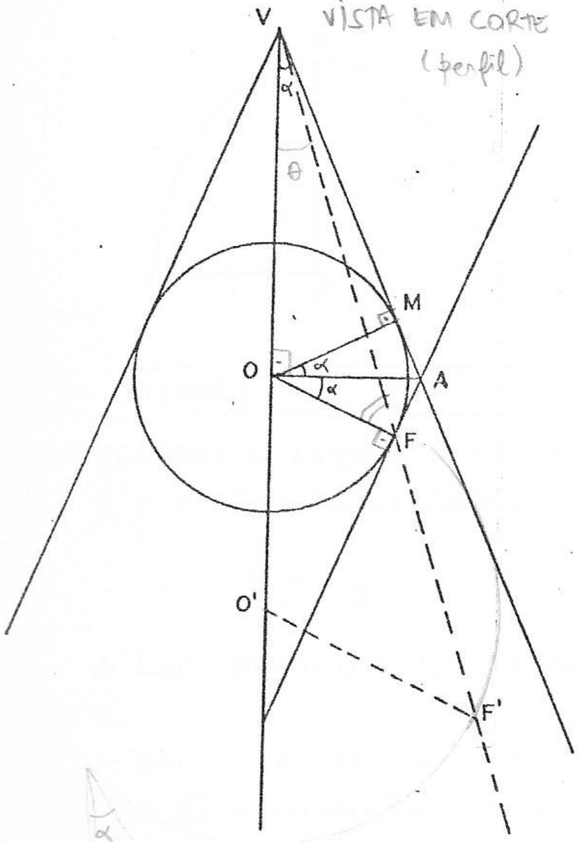
ITEM A - (0,5 pontos)

Determine o LUGAR GEOMÉTRICO dos focos de todas as parábolas, seções planas deste cone.

ITEM B - (0,5 pontos)

Seja P uma parábola, seção do cone dado, cujo vértice dista d do VÉRTICE DO CONE.

Calcule, em função de d e de α, a área do SEGMENTO PARABÓLICO de P, compreendido entre P e uma corda que é perpendicular ao eixo de P e que encontra o EIXO DO CONE.



SOLUÇÃO

1) $\widehat{VOF} = 90 + \alpha$ é const.

$VM = m$ — $\cos\alpha = \frac{m}{VO}$

$VO \cos\alpha = m \therefore \frac{OF}{m} = \operatorname{tg}\alpha$ — $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OF}{m}$

$\cancel{\frac{VO}{OF}}$ $\operatorname{sen}\alpha = \frac{OF}{VO}$ — $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{OF}{VO} = \operatorname{sen}\alpha$

Os Δ VOF são semelhantes pois:

$\frac{VO}{OF} = \frac{VO'}{O'F'}$ — Δ VOF e Δ VO'F'.

ou $\frac{VO}{VO'} = \frac{OF}{OF'}$

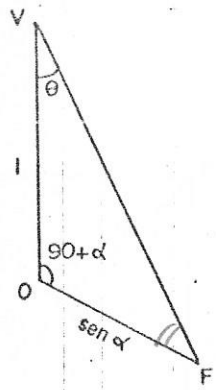
→ são homotéticos de centro V. Logo F descreve uma reta passando por V e quando ela gira em torno do eixo gera um cone de revolução que é o lugar geométrico.

Calculemos o ângulo desse cone que chamaremos de θ.

Tomando $VO = 1$ — Lei dos senos no

$OF = \operatorname{sen}\alpha$ — Δ VOF

$$\frac{\overbrace{\operatorname{sen}\theta}}{\underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{OF}} = \frac{\operatorname{sen}(180 - 90 - \alpha - \theta)}{\underbrace{1}_{VO}}$$



$$\frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \alpha} = \cos(\alpha + \theta)$$

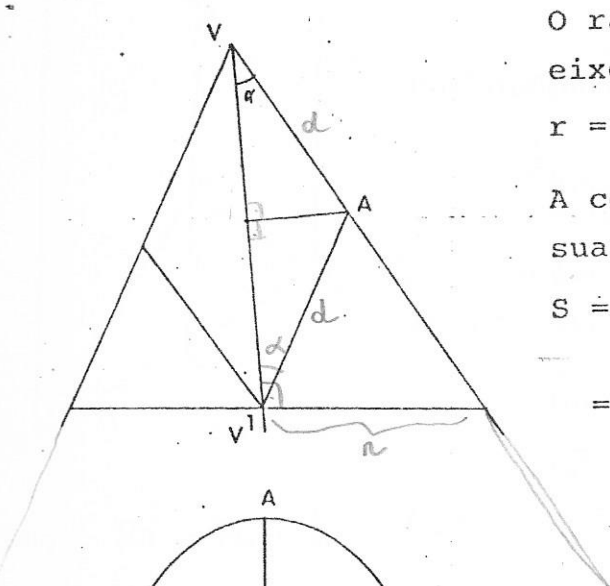
$$\therefore \text{sen } \theta = \text{sen } \alpha[\cos \alpha \cos \theta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \theta]$$

$$\text{sen } \theta = \text{sen } \alpha \cos \alpha \cos \theta - \text{sen}^2\alpha \text{ sen } \theta$$

$$\text{sen } \theta(1 + \text{sen}^2\alpha) = \text{sen } \alpha \cos \alpha \cos \theta$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \alpha \cos \alpha}{1 + \text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{3 - \cos^2\alpha} \; ?$$

2) Se VA = d temos VA = V'A (losango)



$VV' = 2d \cos \alpha$

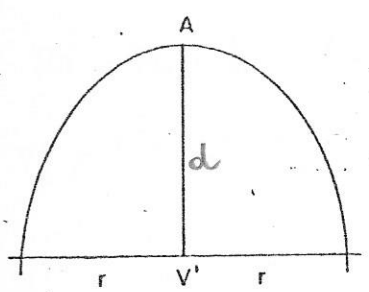
O raio do cone seção perpendicular no eixo por V' é:

$r = VV' \text{tg } \alpha = 2d \text{ sen } \alpha$

A corda do segmento parabólico é 2r; sua área é:

$$S = \frac{2}{3} AV' \cdot 2r = \frac{4}{3} AV \cdot r =$$

$$= \frac{4}{3} d \; 2d \text{ sen } \alpha = \frac{8}{3} d^2 \text{ sen } \alpha$$



10ª QUESTÃO — Valor: 1,0

ENUNCIADO: A figura a seguir mostra um PRISMA em que uma seção reta é o triângulo retângulo isósceles ABC, no qual

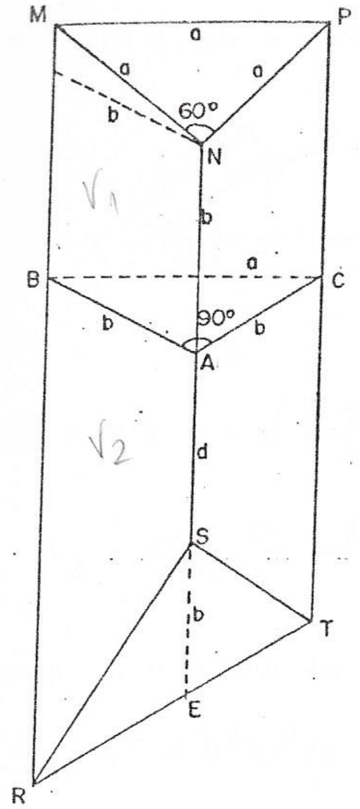
$$\hat{A} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad e \quad , \quad \overline{AB} = b.$$

A base superior do PRISMA é o triângulo equilátero MNP, de lado a.

A base inferior do PRISMA é o triângulo RST, sendo E o ponto médio de $\overline{RT}$ e sendo $\overline{SE} = b$, por construção.

A menor distância entre as bases se encontra sobre a aresta $\overline{NS} = \overline{NA} + \overline{AS}$, sendo, por construção, $\overline{NA} = b$.

O comprimento $\overline{AS} = d$ é escolhido de tal forma que o volume V_1, do SEMI-PRISMA superior BACMNP, seja igual ao volume V_2, do SEMI-PRISMA inferior BACRST.



Calcule:

ITEM A – (0,5 pontos): V_1 em função de b.

ITEM B – (0,5 pontos): d em função de b.

SOLUÇÃO

ITEM A

Δ ABC = seção reta do prisma

$$\therefore \quad V_1 = S_{ABC}\,\frac{\overline{MB} + \overline{NA} + \overline{PC}}{3} \qquad (1)$$

Dos dados do problema:

$$S_{ABC} = \frac{b^2}{2} \quad \text{e} \quad \overline{NA} = b \qquad (2)$$

Inclinações de $\overline{NM}$ e $\overline{NP}$, em relação a AB e AC, respectivamente, são iguais, concluímos:

$$\overline{MB} = \overline{PC} = b + \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\overline{MP} = \overline{BC} = a = b\sqrt{2}$$

Logo: $\overline{MB} = \overline{PC} = b + \sqrt{2b^2 - b^2} = 2b$ (3) $\therefore$ (2) e (3) em (1):

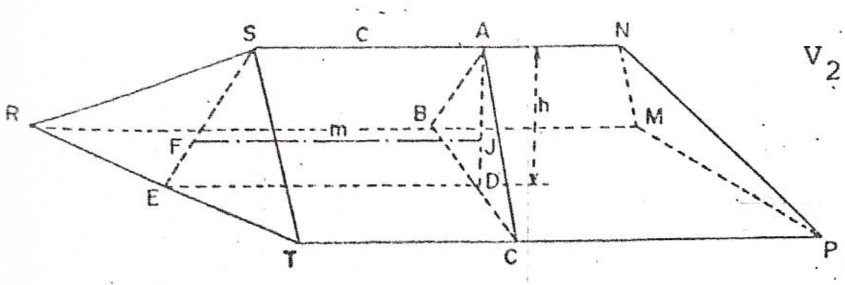
$$\therefore \quad V_1 = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{2b + b + 2b}{3} = \frac{5b^3}{6} \quad \therefore \quad \boxed{V_1 = \frac{5b^3}{6} = 0,833\, b^3}$$

ITEM B

$$V_2 = S_{ABC}\,\frac{\overline{BR} + \overline{CT} + \overline{d}}{3} \qquad (4)$$

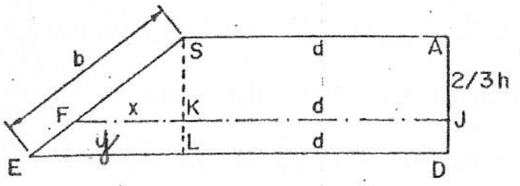
Mas, nos triângulos que possuem um lado sobre cada face do prisma as medianas baixadas do vértice situado na aresta $\overline{NS}$ pertencem, obrigatoriamente, ao plano definido por $\overline{NS}$ e ponto E, pois, no quadrilátero RBCT: $\overline{RB}//\overline{ED}//\overline{TC}$ $\therefore$ $\overline{AD} = \overline{DC} = \frac{a}{2}$ $\frac{a}{2}$

$$\text{Logo: } \frac{\overline{BR} + \overline{CT}}{2} = \overline{DE} \quad \therefore \quad \text{substituindo em (4):}$$



$$V_2 = S_{ABC}\,\frac{2\overline{DE} + d}{3} \qquad (5)$$

Mas se $\overline{FJ} = m$ é a reta que liga os pontos de interseção das medianas de cada triângulo base (Δ ABC e Δ RST), isto é: $\overline{AJ} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}h$ e $\overline{SF} = \frac{2}{3}\ \overline{SE}$, então, temos no quadrilátero SADE:



$$m = d + x$$

$$\overline{DE} = d + y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2h/3}{h} \quad \therefore \quad x = \frac{2}{3}\,y$$

$$m = d + \frac{2}{3}\,y \quad \therefore \quad d = m - \frac{2}{3}\,y$$

$\overline{DE} = d + y = m - \frac{2}{3}y + y = m + y/3$. Substituindo em (5):

$$V_2 = S_{ABC}\,\frac{2m + 2y/3 + m - 2/3y}{3} \quad \therefore \quad \boxed{V_2 = S_{ABC}\cdot m} \qquad (6)$$

Mas $h = b \text{ sen } 45 = \frac{b\sqrt{2}}{2}$

$$y^2 = b^2 - b^2/2 = b^2/2 \quad \therefore \quad y = b/\sqrt{2} \quad \therefore \quad x = \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}\,\frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{3}$$

$$\boxed{m = d + x = d + \frac{b\sqrt{2}}{3}} \qquad (7)$$

(7) em (6) $\therefore$ $V_2 = \frac{b^2}{2}\,(d + \frac{b\sqrt{2}}{3})$ Para que $V_2 = V_1$:

$$\frac{5b^3}{6} = \frac{b^2}{6}\,(3d + b\sqrt{2}) \quad \therefore \quad 5b = 3d + b\sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{d = \frac{b}{3}(5-\sqrt{2}) = 1{,}20b}$$

$$\boxed{d = \frac{b}{3}\,(5-\sqrt{2})}$$