IME – GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA – 1973/1974
Enunciados: JS, 8/12/1973, pág. 11
Enunciados e soluções: JS, 9/12/1973, pág. 20, e 10/12/1973, pág. 20

1ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,4 pontos)

ENUNCIADO:

Mostrar que o conjunto de igualdades

$$\begin{cases} a + b = \pi - (c + d) \\ \dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} d} \end{cases}$$

acarreta a igualdade :

$$\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b = \operatorname{cotg} c - \operatorname{cotg} d$$

1ª QUESTÃO
ITEM 2 (0,6 pontos)

ENUNCIADO:

Considerando $a = \dfrac{\pi}{17}$, calcule o número racional representado pela expressão :

$$\frac{\cos a \cos 13 a}{\cos 3 a + \cos 5 a}$$

2ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,6 pontos)

ENUNCIADO:

Resolver a seguinte equação trigonométrica, determinando todas as soluções.

$$\operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{2}\right).$$

2ª QUESTÃO
ITEM 2 (0,4 pontos)

ENUNCIADO:

Para que valores de $\underline{m}$ a expressão

$$y = \text{sen}^6 x + \cos^6 x + m\,(\text{sen}^4 x + \cos^4 x)$$

independe do valor de $\underline{x}$? Qual o valor de $\underline{y}$ correspondente ?

3ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Considere-se um triângulo ABC e suas alturas AD, BE e CF que cortam o círculo circunscrito em D' , E' e F' , respectivamente. Exprimir os comprimentos de AD, BE, CF, AD', BE' e CF' em função dos ângulos do triângulo e do raio R do círculo circunscrito.

4ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja um círculo $C(0,r)$ e $A \in C$; t uma reta tangente a C em A ; $B \in t$, tal que $AB = a$.

Seja também um círculo C' variável, tangente em B a t e $C \cap C' = (M, N)$.

a) Mostrar que a reta MN passa por um ponto fixo quando C' varia.

b) Calcular entre que limites varia o raio de C'.

c) Determinar o lugar geométrico do ponto médio de MN

5ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Sobre o lado BC de um triângulo ABC e exteriormente ao triângulo constroe-se um quadrado BCDE. Sejam: $AE \cap BC = F$; $AD \cap BC = G$; $BC = a$; $\underline{h}$ a altura correspondente a BC. Por F e G tiram-se perpendiculares FH e GK a BC, sendo

$$H = FH \cap AB$$

$$K = GK \cap AC$$

Pede-se :

(a) Provar que FGKH é um quadrado.

(b) Calcular o lado $\underline{x}$ deste quadrado em função de $\underline{a}$ e $\underline{h}$.

(c) A mesma construção efetuada a partir do lado AC fornece um segundo quadrado análogo ao FGKH, de lado $\underline{y}$. Que particularidade deve apresentar o triângulo ABC para que se tenha $x = y$.

6ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja um triângulo ABC. De B e de C tiram-se duas cevianas BN e CP. Seja $BN \cap CP = O$. De A tira-se a ceviana AO que corta BC em M. Seja $PN \cap BC = S$. Demonstre que os pontos M e S dividem harmônicamente o lado BC.

7ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Dá-se um icosaedro regular. Secciona-se cada ângulo sólido por um plano que corta as arestas à distância de $\frac{1}{3}$ do seu comprimento, contada a partir dos vértices. Destacadas estas porções, considera-se o sólido resultante.

Pede-se :

(a) Dizer qual a natureza das diferentes faces e dos diferentes ângulos sólidos.

(b) O número de faces, de arestas e de vértices deste sólido.

8ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0pontos)

ENUNCIADO:

Sejam ABCD e A'B'C'D' dois quadrados de lado $\underline{a}$ e centros O e O', situados em planos paralelos π e π' distantes $\underline{d}$, sendo O O' perpendicular a ambos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado.

Liga-se cada vértice de cada quadrado aos 2 vértices mais próximos do outro. Obtêm-se, assim, triângulos que, com os dois quadrados, formam um sólido S.

Pede-se :

(a) Determinar $\underline{d}$ em função de $\underline{a}$, de modo que os triângulos acima descritos sejam equiláteros.

(b) Determinar $\underline{d}$ em função de $\underline{a}$, de modo que exista uma esfera com centro no ponto médio de O O' e passando pelos pontos médios de todas as arestas de S.

9ª QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Dá-se em um plano π, um hexágono regular ABCDEF de centro O e lado $\underline{a}$. Toma-se sobre uma perpendicular ao plano em O um ponto S tal que $SO = \frac{3}{2} a$ e considera-se a pirâmide SABCDEF, a qual se corta por um plano σ passando por AB : a secção é um hexágono ABMNPQ.

Pede-se :

(a) Mostrar que MN passa por um ponto fixo quando a inclinação de σ varia e determinar a distância desse ponto a O.

(b) Fixando-se P e N nos pontos médios das arestas a que pertencem, determinar a razão $\frac{SQ}{SF}$ e a área da seção ABMNPQ.

10ª QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Considere-se um cone de revolução tal que a seção de maior excentricidade possível seja uma hipérbole equilátera.

Pede-se :

(a) O raio da esfera focal correspondente a uma hipérbole equilátera de 10cm de raio.

(b) O ângulo que forma com o eixo do cone o plano de uma elipse situada sobre esse cone e cujos eixos são 2cm e $\sqrt{7}$ cm.

OBS: Esfera focal é uma esfera inscrita no cone tangenciando o plano secção.

SOLUÇÕES

1ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,4 pontos)

ENUNCIADO:

Mostrar que o conjunto de igualdades

$$\begin{cases} a + b = \pi - (c + d) \\ \dfrac{\text{sen } a}{\text{sen } b} = \dfrac{\text{sen } c}{\text{sen } d} \end{cases}$$

acarreta a igualdade :

$$\text{cotg } a - \text{cotg } b = \text{cotg } c - \text{cotg } d$$

$$a + b = \pi - (c + d) \Rightarrow a + d = \pi - (b + c)$$

Logo $\text{sen}(a+d) = \text{sen}(b+c)$ ou

$$\text{(I)} \quad \text{sen } a \cos d + \text{sen } d \cos a = \text{sen } b \cos c + \text{sen } c \cos b$$

Como $\dfrac{\text{sen } a}{\text{sen } b} = \dfrac{\text{sen } c}{\text{sen } d}$ então

$$\text{(II)} \quad \text{sen } a \,.\, \text{sen } d = \text{sen } b \,.\, \text{sen } c$$

Dividindo (I) e (II) membro a membro vem:

$$\cot d + \cot a = \cot c + \cot b$$

ou

$$\cot a - \cot b = \cot c - \cot d$$

1ª QUESTÃO

ITEM 2 (0,6 pontos)

ENUNCIADO:

Considerando $a = \frac{\pi}{17}$, calcule o número racional representado pela expressão :

$$\frac{\cos a \cos 13 \cdot a}{\cos 3\, a + \cos 5\, a}$$

Seja $y = \frac{\cos\alpha \cdot \cos 13\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$ Logo

$$y = \frac{\cos\alpha \cdot \cos 13\alpha}{2\cos\frac{3\alpha+5\alpha}{2} \cdot \cos\frac{5\alpha-3\alpha}{2}} = \frac{\cos 13\alpha}{2\cos 4\alpha}$$

Como $\alpha = \pi/17$ então $y = \frac{\cos 13\pi/17}{2\cos 4\pi/17}$

Mas $\frac{13\pi}{17} + \frac{4\pi}{17} = \pi$; logo

$$y = \frac{-\cos 4\pi/17}{2\cos 4\pi/17} \quad \therefore \quad y = -1/2$$

2ª QUESTÃO

ITEM 1 (0,6 pontos)

ENUNCIADO:

Resolver a seguinte equação trigonométrica, determinando todas as soluções.

$$\operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Da equação dada se tira

$$\operatorname{sen}(x - \pi/4) = \pm \cos(3x + \pi/2)$$

<u>1ª hipótese</u>:

$$\operatorname{sen}(x - \pi/4) = \cos(3x + \pi/2)$$

$$\cos(3\pi/4 - x) = \cos(3x + \pi/2)$$

Logo $(3x + \pi/2) \pm (3\pi/4 - x) = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Daí vem: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$ ou $x = k\pi - \frac{5\pi}{8}$

onde $k \in \mathbb{Z}$

<u>2ª hipótese</u>:

$$\operatorname{sen}(x - \pi/4) = -\cos(3x + \pi/2)$$

$$\cos(\pi/4 + x) = \cos(3x + \pi/2)$$

Logo $(3x + \pi/2) \pm (\pi/4 + x) = 2k\pi$

Daí vem:

$$x = k\pi - \pi/4 \quad \text{ou} \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{3\pi}{16}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$

2ª QUESTÃO
ITEM 2 (0,4 pontos)

ENUNCIADO)

Para que valores de **m** a expressão

$$y = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x + m(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)$$

independe do valor de **x** ? Qual o valor de **y** correspondente ?

Como já é sabido:

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$

e $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

Logo

$$y = (1+m) - (3+2m)\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x$$

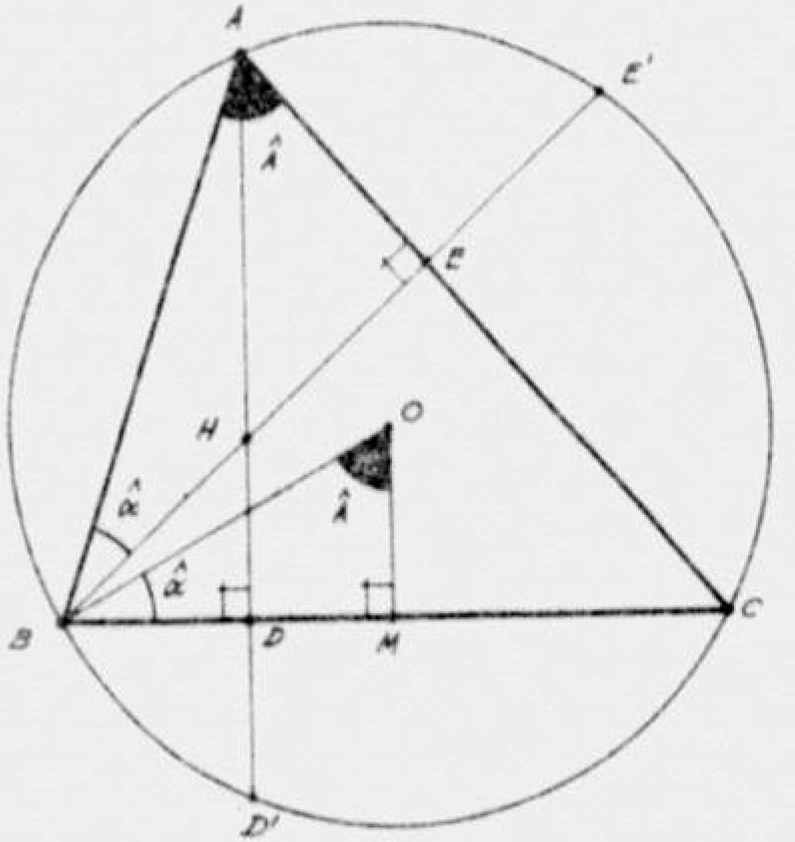
Como foi pedido: $3 + 2m = 0$

Logo $m = -3/2$

$3^{\underline{a}}$ QUESTÃO ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Considere-se um triângulo ABC e suas alturas AD, BE e CF que cortam o círculo circunscrito em D', E' e F', respectivamente. Exprimir os comprimentos de AD, BE, CF, AD', BE' e CF' em função dos ângulos do triângulo e do raio R do círculo circunscrito.



De acordo com a figura:

$\overline{AH} = 2\,\overline{OM}$

$\overline{OM} = R\cos\hat{A}$

Logo

$\overline{AH} = 2R\cos\hat{A}$

Analogamente

$\overline{BH} = 2R\cos\hat{B}$

$\overline{CH} = 2R\cos\hat{C}$

Como D' é simétrico de H em relação a BC; logo

$$\overline{HD} = \overline{DD'} = \overline{BH}\,\text{sen}\,(\pi/2 - \hat{C}) = 2R\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

Sendo assim:

$$\overline{AD} = \overline{AH} + \overline{HD} = 2R\cos\hat{A} + 2R\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

e $\overline{AD'} = \overline{AH} + 2\overline{HD} = 2R(\cos\hat{A} + 2\cos\hat{B}\cos\hat{C})$. Logo

$\overline{AD} = 2R(\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C})$ $\quad$ $\overline{AD'} = 2R(\cos\hat{A} + 2\cos\hat{B}\cos\hat{C})$

$\overline{BE} = 2R(\cos\hat{B} + \cos\hat{A}\cos\hat{C})$ $\quad$ $\overline{BE'} = 2R(\cos\hat{B} + 2\cos\hat{A}\cos\hat{C})$

$\overline{CF} = 2R(\cos\hat{C} + \cos\hat{A}\cos\hat{B})$ $\quad$ $\overline{CF'} = 2R(\cos\hat{C} + 2\cos\hat{A}\cos\hat{B})$

4ª QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Seja um círculo $C(O,r)$ e $A \in C$; t uma reta tangente a C em A ; $B \in t$, tal que $AB = a$.

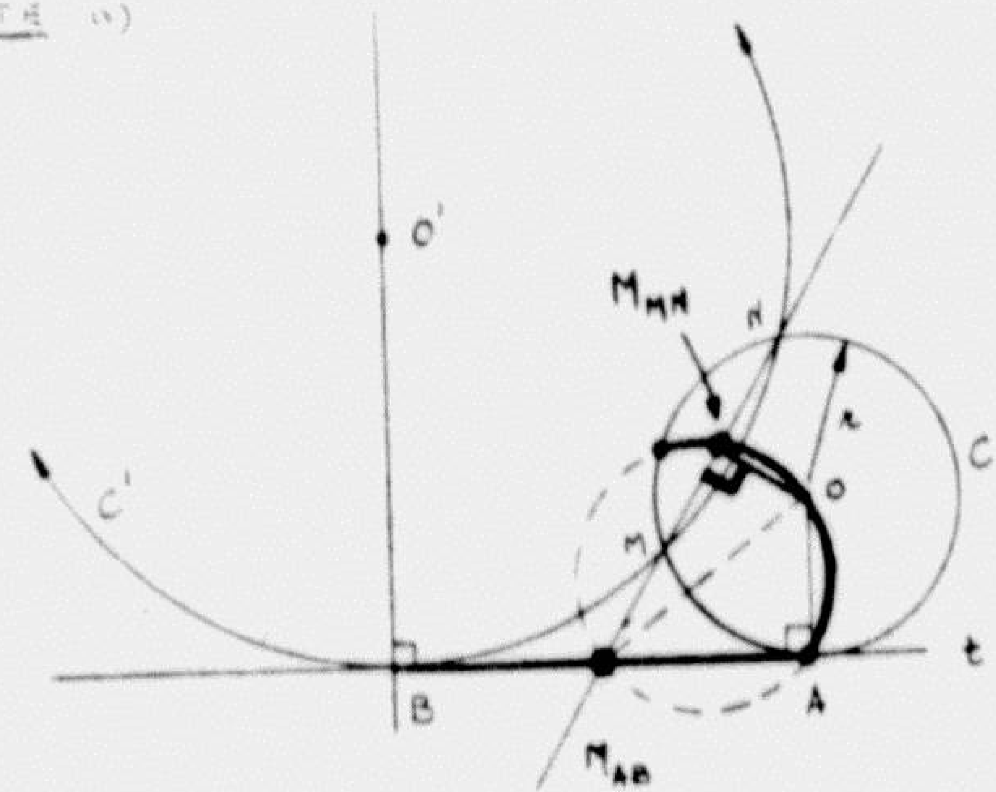
Seja também um círculo C' variável, tangente em B a t e $C \cap C' = (M, N)$.

a) Mostrar que a reta MN passa por um ponto fixo quando C' varia.

b) Calcular entre que limites varia o raio de C'.

c) Determinar o lugar geométrico do ponto médio de MN

PARTE a)



(continua)

$pot_{C} M = pot_{C'} M = 0$

$pot_{C} N = pot_{C'} N = 0$

Logo MN é o eixo radical de C e C', para todo C'

Chamemos $\{M_{AB}\} = AB \cap MN$, para todo C'

Assim sendo: $M_{AB} \in MN$ e $M_{AB} \in AB$; e

portanto:

$$pot_{C} M_{AB} = pot_{C'} M_{AB}$$

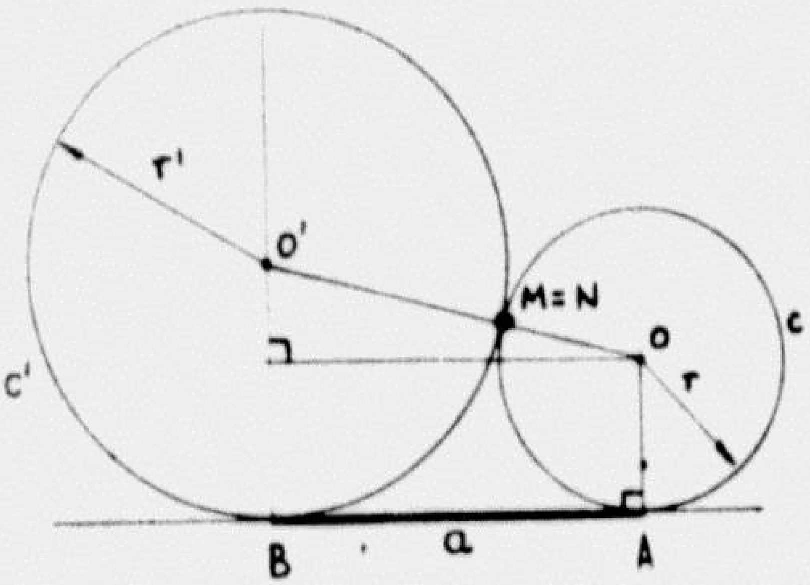
e

$$\overline{AM_{AB}}^2 = \overline{BM_{AB}}^2$$

Concluimos que M_{AB} é ponto médio de AB;

então M_{AB} é fixo

<u>PARTE B</u>



Quando r' for mínimo, $\overline{MN} = 0$ e então C e C' serão tangentes externamente como na figura ao lado

Logo

(continua)

$$a^2 + (r - r')^2 = (r + r')^2$$

Desenvolvendo teremos $r' = \dfrac{a^2}{4r}$. Assim

sendo $r' \in \left[\dfrac{a^2}{4r}, \infty\right)$

PARTE C

Como para todo C', M_{MN} é ponto médio de MN, $O\widehat{M_{MN}}M_{AB} = 90°$

Como O é fixo e M_{AB} é fixo (item a), temos que OM_{AB} é o diametro do círculo que passa por qualquer M_{MN}. Assim sendo o L.G é a parte deste círculo interior a C.

5ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Sobre o lado BC de um triângulo ABC e exteriormente ao triângulo constroe-se um quadrado BCDE. Sejam: $AE \cap BC = F$; $AD \cap BC = G$; $BC = a$; $\underline{h}$ a altura correspondente a BC. Por F e G tiram-se perpendiculares FH e GK a BC, sendo

$$H = FH \cap AB$$

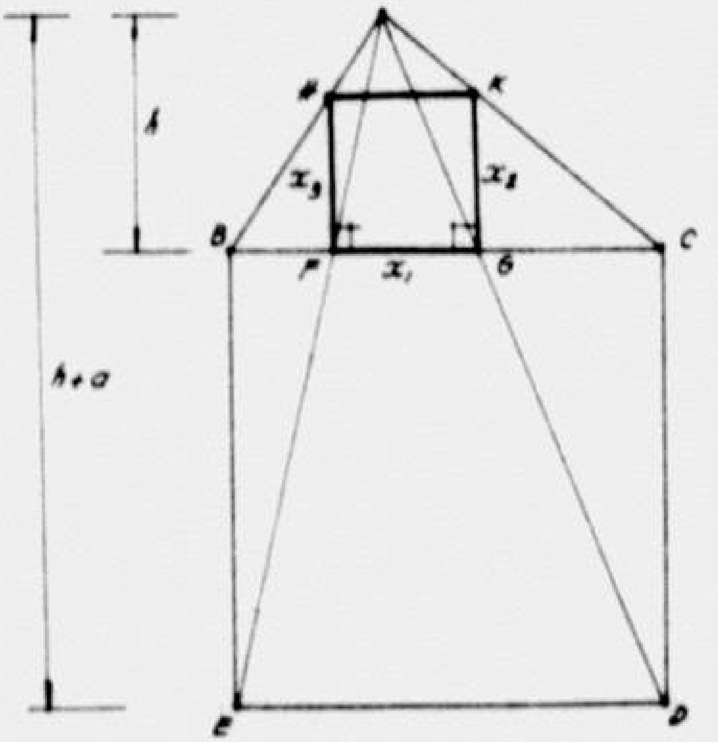
$$K = GK \cap AC$$

Pede-se:

(a) Provar que FGKH é um quadrado.

(b) Calcular o lado $\underline{x}$ deste quadrado em função de $\underline{a}$ e $\underline{h}$.

(c) A mesma construção efetuada a partir do lado AC fornece um segundo quadrado análogo ao FGKH, de lado $\underline{y}$. Que particularidade deve apresentar o triângulo ABC para que se tenha $x = y$.



As semelhanças

$\Delta AHG \sim \Delta ACD$

$\Delta AFG \sim \Delta AED$

$\Delta AHF \sim \Delta ABE$

tem todas razão

$$\frac{h}{h+a}$$

Sendo assim

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{ha}{h+a}$$

Logo FGKH é um quadrado de lado

$$x = \frac{ha}{h+a}$$

Analogamente $\quad y = \dfrac{h_B \cdot b}{h_B + b}$ e tem ...

$$x = y \implies \frac{h_A \cdot a}{h_A + a} = \frac{h_B \cdot b}{h_B + b}$$

Como $h_A \cdot a = h_B\, b =$ dobro da área [illegible]

a igualdade só se verifica se

$$\frac{2S}{\frac{2S}{a} + a} = \frac{2S}{\frac{2S}{b} + b}$$

Daí se tira

$$2S\,(b-a) = ab\,(b-a)$$

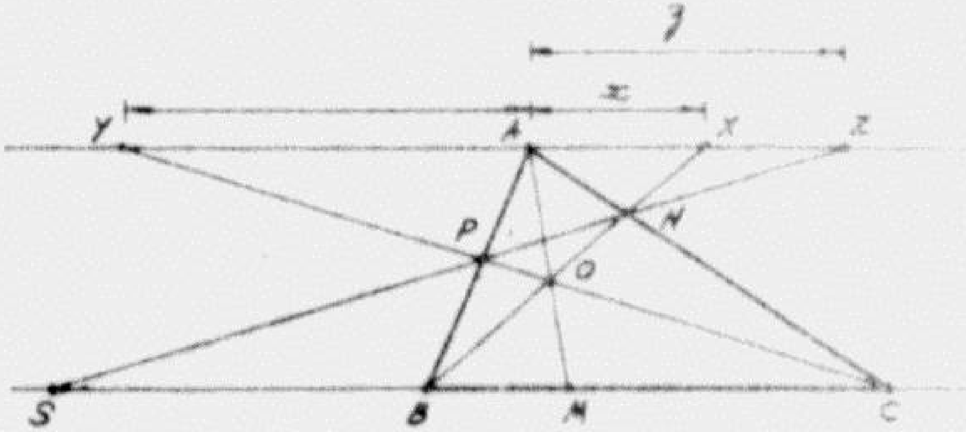
donde se conclue

1°) $b = a \implies$ o Δ é isósceles ...

2°) $S = \dfrac{ab}{2} \implies$ o Δ é retângulo ...
[illegible] AB

6ª QUESTÃO ITEM ÚNICO. (1,0 pontos)	ENUNCIADO:

Seja um triângulo ABC. De B e de C tiram-se duas cevianas BN e CP. Seja $BN \cap CP = O$. De A tira-se a ceviana que corta BC em M. Seja $PN \cap BC = S$. Demonstre que os pontos M e S dividem harmonicamente o lado BC.



As semelhanças $\Delta OBM \sim \Delta OXA$ e Δ ... tem a mesma razão Logo

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{x}{y}$$

As semelhanças $\Delta PSB \sim \Delta PZA$ e ΔPSC ... a mesma razão. Logo

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}} = \frac{z}{y+z}$$

As semelhanças $\Delta NSB \sim \Delta NZX$ e ΔN ... tem a mesma razão. Logo

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}} = \frac{z-x}{z}$$

Sendo assim

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}} = \frac{z}{y+z} = \frac{z-x}{z} = \frac{z-(z-x)}{(y+z)-z} = \frac{x}{y} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$$

e então M e C dividem harmonicamente o lado BC.

7ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

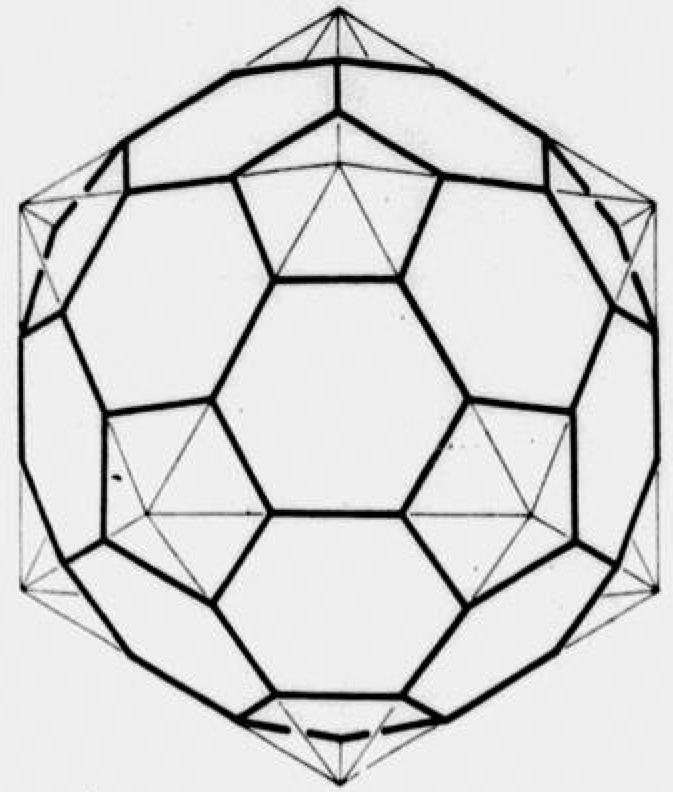
Dá-se um icosaedro regular. Secciona-se cada ângulo sólido por um plano que corta as arestas à distância de $\frac{1}{3}$ do seu comprimento, contada a partir dos vértices. Destacadas estas porções, considera-se o sólido resultante.

Pede-se :

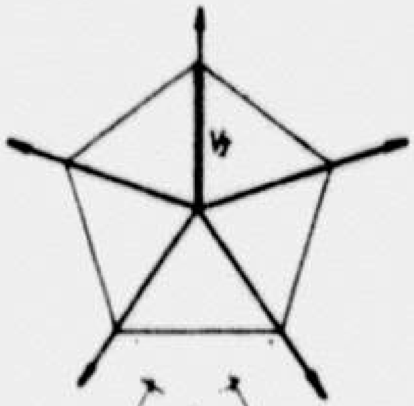
(a) Dizer qual a natureza das diferentes faces e dos diferentes ângulos sólidos.

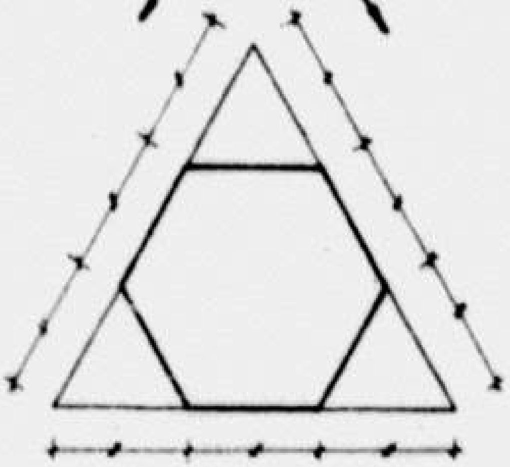
(b) O número de faces, de arestas e de vértices deste sólido.

O poliedro será:



(continua)





1) O número de arestas que concorrem em cada vértice do icosaedro vale 5. Logo, para cada V_I existe uma face pentagonal regular convexa do novo poliedro.

2) Em cada face F_I do icosaedro forma-se uma face hexagonal regular convexa do novo poliedro.

3) Se chamarmos g o gênero e q a quantidade de cada tipo de face teremos

CLASSIFICAÇÃO	g	q	$g \times q$
Reg. convexa	5	$V_I = 12$	5×12
Reg. convexa	6	$F_I = 20$	6×20

e então

$$F = 12 + 20 = 32$$

$$2A = 5 \times 12 + 6 \times 20 = 180$$

$$A = 90$$

Como o poliedro é convexo, temos

$$V + F = A + 2$$

$$V + 32 = 90 + 2$$

$$V = 60$$

6ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

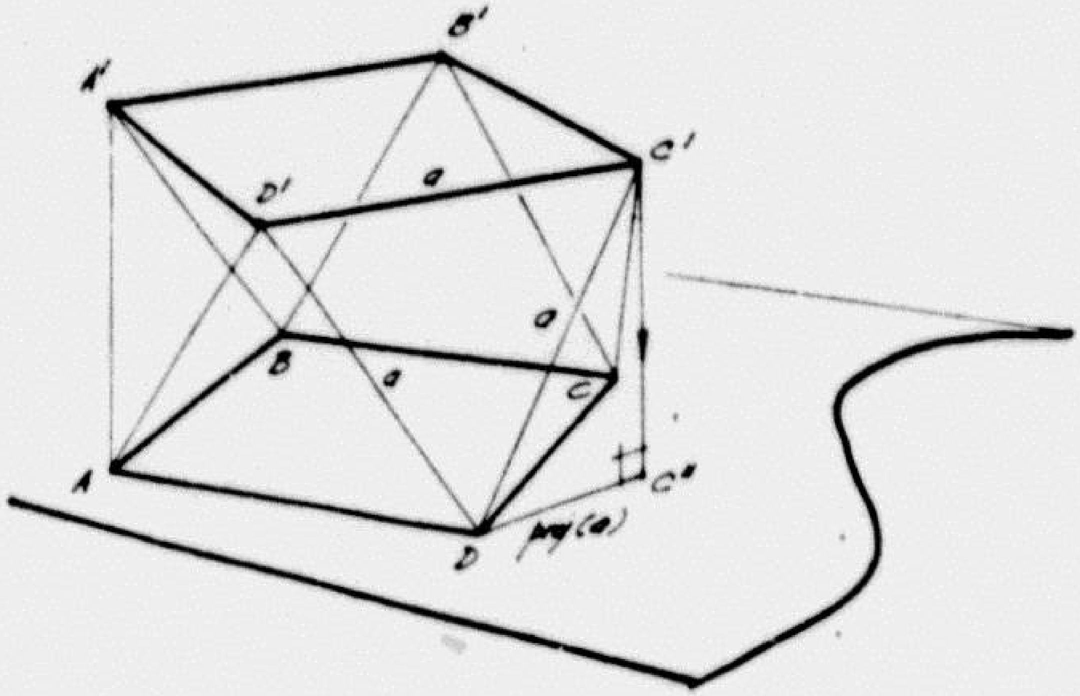
Sejam ABCD e A'B'C'D' dois quadrados de lado a e centros O e O', situados em planos paralelos π e π' distantes d, sendo O O' perpendicular a ambos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado.

Liga-se cada vértice de cada quadrado aos 2 vértices mais próximos do outro. Obtêm-se, assim, triângulos que, com os dois quadrados, formam um sólido S.

Pede-se :

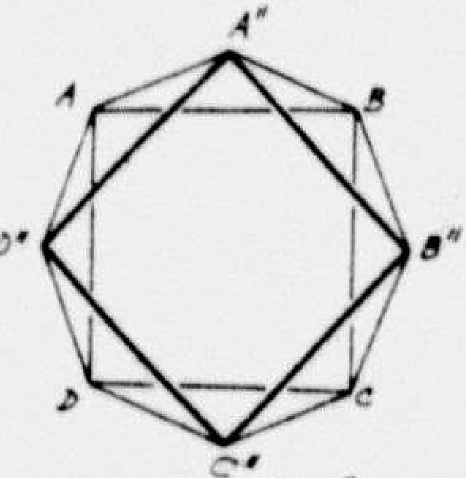
(a) Determinar d em função de a , de modo que os triângulos acima descritos sejam equiláteros.

(b) Determinar d em função de a , de modo que exista uma esfera com centro no ponto médio de O O' e passando pelos pontos médios de todas as arestas de S.



(continua)

a) Projetando $A'B'C'D'$ sôbre o plano de $ABCD$ obtemos um octógono regular $AA''BB''CC''DD''$



Sendo assim, se R for o raio do circulo circunscrito ao octógono, teremos

$$a = \ell_4 = R\sqrt{2} \quad \text{e}$$

$$\text{proj}(a) = \sqrt{a^2 - d^2} = \ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Substituindo, teremos

$$\sqrt{a^2-d^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

e portanto $\quad d = \frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{2}}$

b) Esta condição é equivalente a da letra (a) porque o ponto médio de OO' é equidistante dos vértices de cada triângulo face e portanto se o triângulo é equilátero, será também equidistante dos lados

$$d = \frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{2}}$$

9ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

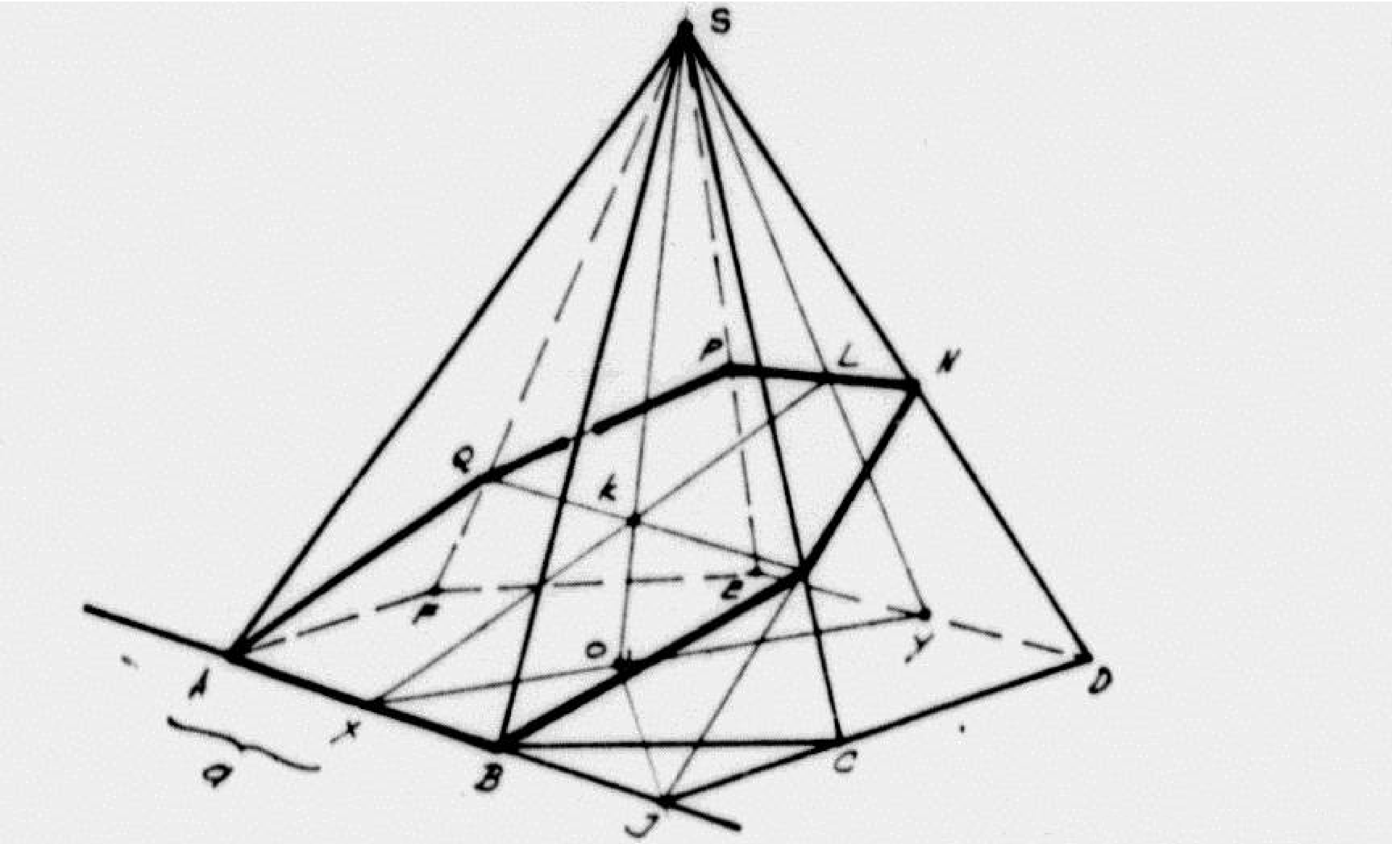
ENUNCIADO:

Dá-se em um plano π, um hexágono regular ABCDEF de centro O e lado **a**. Toma-se sobre uma perpendicular ao plano em O um ponto S tal que $SO = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ e considera-se a pirâmide SABCDEF, a qual se corta por um plano σ passando por AB: a secção é um hexágono ABMNPQ.

Pede-se:

(a) Mostrar que MN passa por um ponto fixo quando a inclinação de σ varia e determinar a distância desse ponto a O.

(b) Fixando-se P e N nos pontos médios das arestas a que pertencem, determinar a razão $\frac{SQ}{SF}$ e a área da seção ABMNPQ.

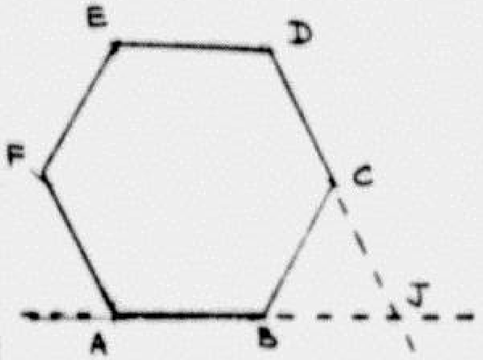


(continua)

a) Seja α o plano da face SCD e $\{J\} = \alpha \cap \sigma \cap \pi$

Sendo assim $J \in \alpha \cap \sigma = MN$, $J \in \alpha \cap \pi = CD$ e $J \in \sigma \cap \pi = AB$ e portanto J é fixo, já que AB e CD são fixos.

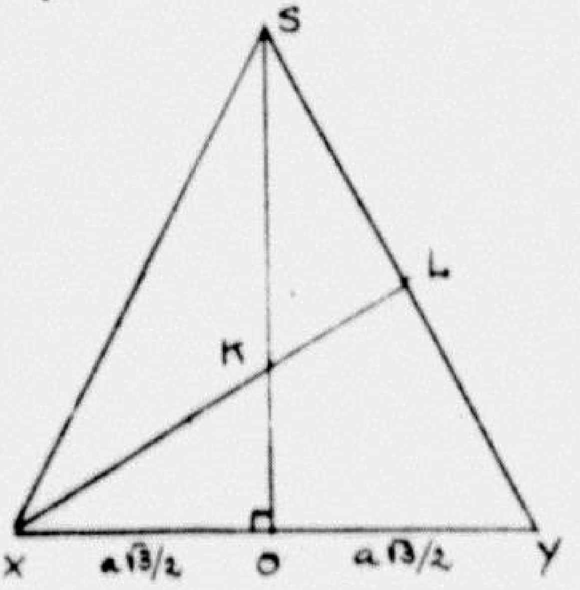
No plano π teremos:



$\overline{OJ}$ = dobro do apotema do hexagono

$\overline{OJ} = a\sqrt{3}$

b) Considerando a secção SXY vem



onde K é baricentro: $\frac{\overline{SK}}{\overline{SO}} = \frac{2}{3}$

Logo:

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{SF}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SC}} = \frac{2}{3} = \frac{\overline{QM}}{\overline{FC}} \text{ e}$$

$$\overline{OK} = \frac{\overline{SO}}{3} = \frac{a}{2}$$

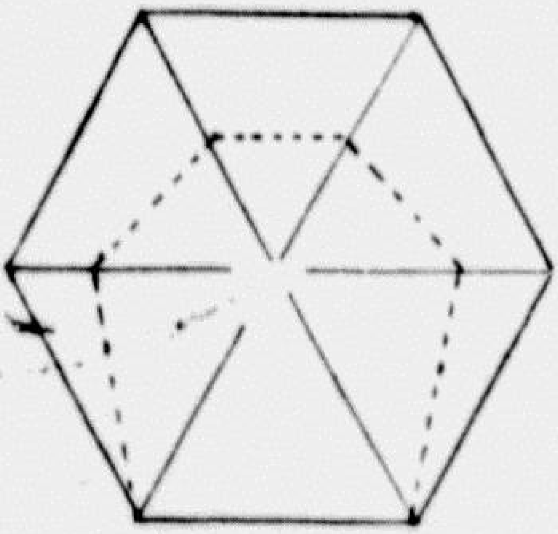
Logo $\overline{KQ} = \overline{KM} = \frac{2a}{3}$ e

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OX}} = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg } 30°$$

Assim sendo $\widehat{\sigma\pi} = 30°$

(continua)

Projetando a seção sôbre a base vem (simbolicamente)



$$S \cos 30^\circ = \triangle_{a} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

$$S \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{39}{12}$$

$$S = \frac{13a^2}{8}$$

10ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Considere-se um cone de revolução tal que a seção de maior excentricidade possível seja uma hipérbole equilátera.

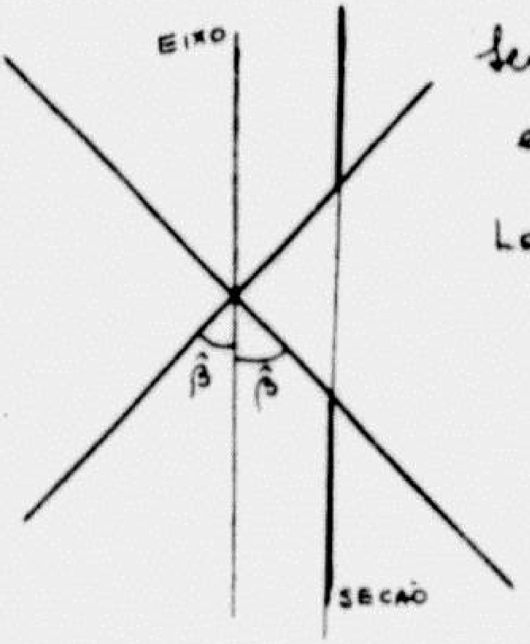
Pede-se :

(a) O raio da esfera focal correspondente a uma hipérbole equilátera de 10cm de raio.

(b) O ângulo que forma com o eixo do cone o plano de uma elípse situada sobre esse cone e cujos eixos são 2cm e $\sqrt{7}$ cm.

OBS: Esfera focal é uma esfera inscrita no cone tangenciando o plano secção.

Como sabemos a hipérbole de menor excentricidade é a interseção do cone com um plano paralelo ao eixo.



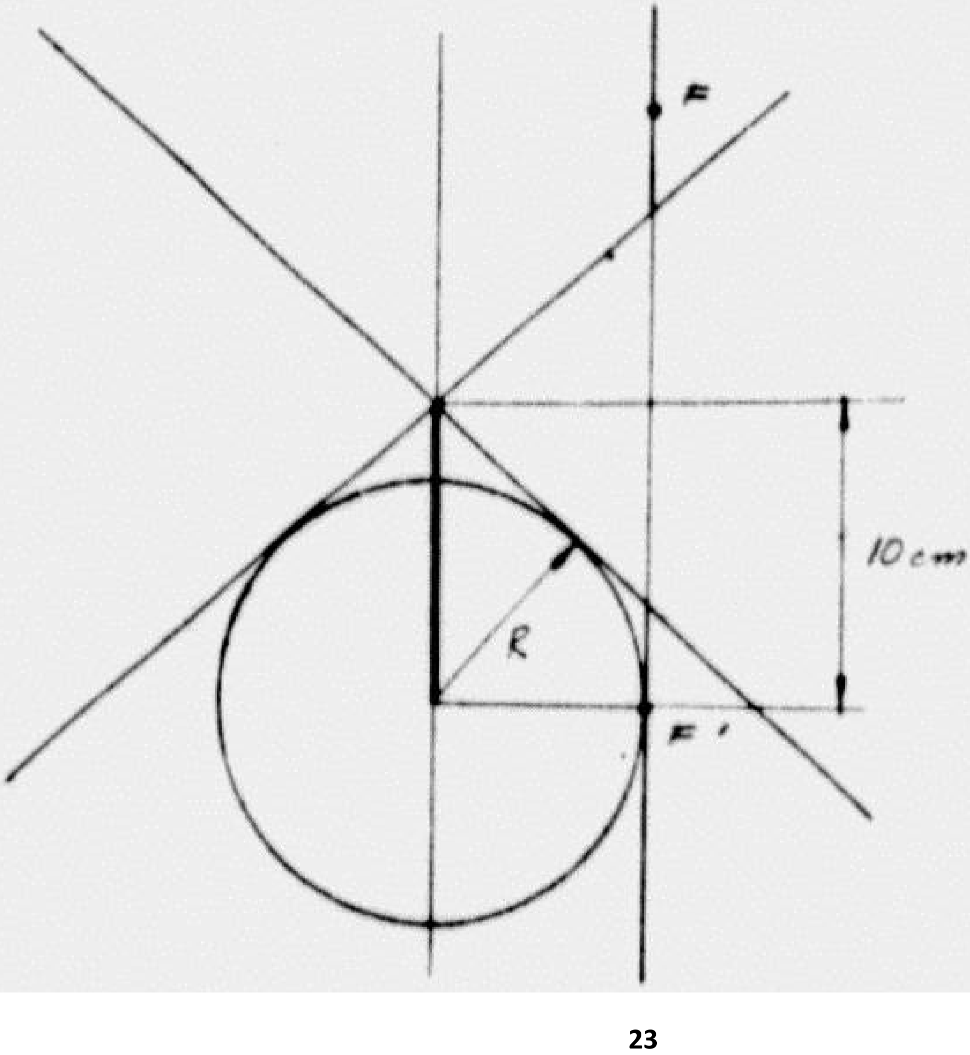
VISTA EM CORTE

Sendo assim, teremos

$$e = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \sqrt{2} \quad e \quad \hat{\alpha} = 0$$

Logo $\beta = 45°$

a) Admitindo-se que o raio de uma hipérbole seja a semidistância focal teremos.



$c = 10$

$\beta = 45°$

Logo

$R = 5\sqrt{2}$ cm

b) $2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$2b = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}/2$

$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = \sqrt{2}/2 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}/2$

Logo, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow \cos\alpha = 1/2$

Temos $\alpha = 60°$