1a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Determinar os valores do arco $\underline{x}$ que satisfazem a equação:

$$\text{sen } x = \sqrt{3}\,(\sec x - \cos x)$$

SOLUÇÃO:

$$\text{sen } x = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) \qquad \cos x \neq 0$$

$$\text{sen } x \cos x = \sqrt{3}\,\text{sen}^2 x$$

$$\text{sen } x\,(\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen } x) = 0 \qquad (1)$$

De (1):

$$\text{sen } x = 0 \implies x = k\pi \quad , k \in z$$

$$\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen } x = 0 \implies tg x = \frac{\sqrt{3}}{3} \implies x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad k \in z$$

RESPOSTA:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k\pi + \dfrac{\pi}{6} \quad , \quad k \in z \end{array}}$$

2a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Calcular o lado $\underline{c}$ dos triângulos que tenham:

$\underline{a} = 4$ cm

$\underline{b} = 4\,(1 + \sqrt{3})$ cm

$\underline{\hat{A}} = 15^o$

SOLUÇÃO:

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A} \implies \text{sen } B = \frac{b \text{ sen } \hat{A}}{a}$$

$$\text{sen } \hat{A} = \text{sen } 15^o = \text{sen } (45^o - 30) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,(\sqrt{3} - 1)$$

$$\text{sen } B = (1 + \sqrt{3})\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,(\sqrt{3} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\hat{B}_1 = 45^o \quad e \quad \hat{B} = 180 - 45 = 135^o$$

$$\hat{C}_1 = 180 - (15 + 45) = 120^o$$

$$\hat{C}_2 = 130 - (15 + 135) = 30^o$$

$$c_1 = \frac{4 \operatorname{sen} 120^o}{\operatorname{sen} 15^o} = \frac{4(\sqrt{3}/2)}{(\sqrt{2}/4)(\sqrt{3} - 1)} = 2\sqrt{6}\,(1 + \sqrt{3})$$

$$c_2 = \frac{4 \operatorname{sen} 30^o}{\operatorname{sen} 15^o} = \frac{4(1/2)}{(\sqrt{2}/4)(\sqrt{3} - 1)} = 2\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})$$

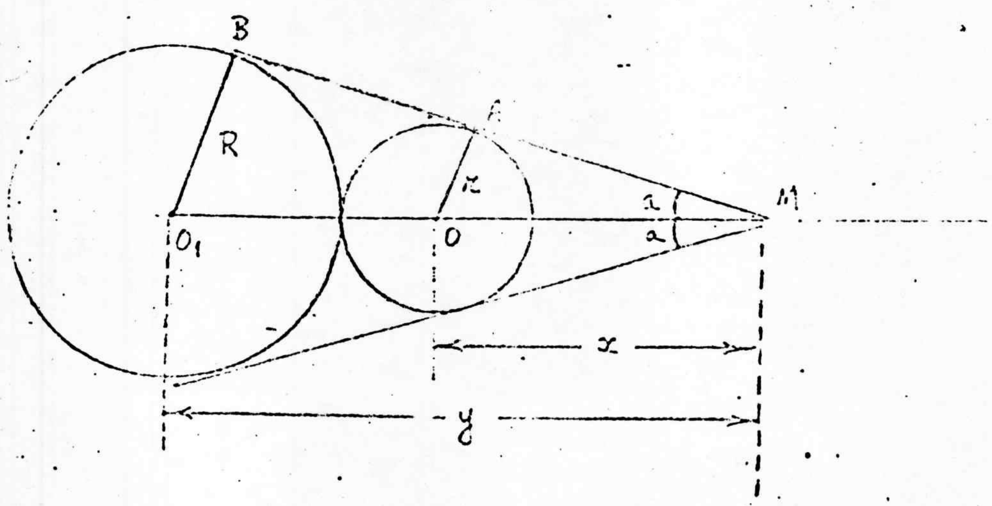
<u>RESPOSTA:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= 2\sqrt{6}\,(1 + \sqrt{3}) \\ c_2 &= 2\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}}$$

<u>3a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO</u> (0,5 pontos)

<u>ENUNCIADO:</u> Dois círculos tangentes entre si têm raios $\underline{R}$ e $\underline{r}$, sendo $\underline{R} > \underline{r}$. As tangentes exteriores comuns a êsses dois círculos formam um ângulo $2a$.

Exprimir $\underline{R}$ em função de $\underline{r}$ e da tangente de $a/2$.



$$\frac{x}{y} = \frac{r}{R} \qquad (1)$$

$$y = x + r + R \qquad (2)$$

Eliminando y entre as equações (1) e (2):

$$\frac{x}{r} = \frac{R + r}{R - r} \qquad (3)$$

Do $\triangle$ MOA: $\quad \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{sen\ a} \qquad (4)$

Eliminando x entre as equações (3) e (4):

$$sen\ a = \frac{R - r}{R + r} \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{1 + sen\ a}{1 - sen\ a}$$

Utilizando a identidade $\quad sen\ a = \dfrac{2\ tg(a/2)}{1 + tg^2(a/2)}$,

obtemos sucessivamente:

$$R = r\ \frac{1 + \dfrac{2\ tg(a/2)}{1 + tg^2(a/2)}}{1 - \dfrac{2\ tg(a/2)}{1 + tg^2(a/2)}} = r\ \frac{[1 + tg\ (a/2)]^2}{[1 - tg\ (a/2)]^2}$$

$$R = r\left[\frac{tg\ (r/4) + tg\ (a/2)}{1 - tg\ (r/4)\ tg\ (a/2)}\right]^2$$

RESPOSTA: $\boxed{R = r\ tg^2 \quad \dfrac{\pi}{4} \quad \dfrac{a}{2}}$

4a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Demonstrar que um triângulo ABC, no qual os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ verificam a relação

$$\frac{Sen^2\ B}{Sen^2\ C} = \frac{Tan\ B}{Tan\ C}$$

é retângulo ou isósceles.

$$Sen^2\ B\ tg\ C = sen^2\ C\ tg\ B \implies Sen\ B\ Sen\ C\ \left(\frac{sen\ B}{cos\ C} - \frac{sen\ C}{cos\ B}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{sen\ 2B - sen\ 2C}{cos\ B\ cos\ C}\right) = 0 \implies sen\ 2B - sen\ 2C = 0$$

$$2\ sen\ (B - C)\ cos\ (B + C) = 0 \qquad \begin{cases} sen\ (B - C) = 0 & (1) \\ cos\ (B + C) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) $\Longrightarrow$ $B = C$ ou o triângulo ABC é isósceles

De (2) $\Longrightarrow$ $B + C = \dfrac{\pi}{2}$ ou o triângulo ABC é retângulo em A.

5a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Determinar o seno e o coseno do ângulo, menor que 180^o, formado pelos ponteiros de um relógio que marca 12 horas e 15 minutos.

Em uma hora o ponteiro maior percorre um arco de 2π rd e o menor um arco de $2\pi/12$ ou $\pi/6$ rd.

Assim o ângulo formado pelos ponteiros após uma hora será

$$2\pi - \frac{\pi}{6} = 11\frac{\pi}{6} \text{ rd} \quad \text{e em 15 min} = \frac{1}{4} \text{ h} \quad \text{será}$$

$$\frac{11\pi}{24} = 82^o 30'$$

$$82^o 30' = 90^o - 7^o 30'$$

$$\text{sen } 15^o = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^o}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\cos 15^o = \sqrt{1 - \text{sen}^2 15^o} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\text{sen } 7^o 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 15^o}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \cos 82^o 30'$$

$$\cos 7^o 30' = \sqrt{1 - \text{sen}^2 7^o 30'} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} =$$

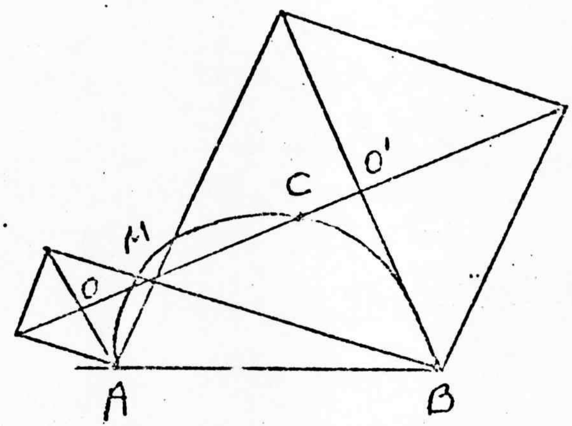
$$= \text{sen } 82^o 30'$$

6a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Considere-se um ponto móvel M, sôbre uma semicircunferência de diâmetro AB. Sôbre os lados MA e MB do triângulo MAB e exteriormente a êste, constroem-se os quadrados de centros O e O'. Supondo-se que M percorre a semicircunferência, pede-se:

a) Mostrar que M, O e O' permanecem sôbre uma reta e que esta passa por um ponto fixo.

b) Determinar os lugares geométricos de O e O'.



a) $O\hat{M}A = O'\hat{M}B = 45^o$

$O\hat{M}A + O'\hat{M}B + A\hat{M}B = 180$

Logo OMO' estão em linha reta.

Seja C o 2º ponto em que OO' encontra o semi-circulo: $C\hat{M}B = O'\hat{M}B = 45^o$

Logo $\widehat{BC} = 2 \times 45^o = 90^o$

C é fixo: é o meio de $\widehat{AB}$.

b) Temos:

$$C\hat{O}A = M\hat{O}A = C\hat{O}'B = M\hat{O}'B = 90^o$$

Logo:

O l.g. do ponto O é um semi-circulo de diâmetro AC.

O l.g. do ponto O' é um semi-circulo de diâmetro BC.

RESPOSTA:

> a) o ponto fixo é C meio do $\widehat{AB}$
>
> b) l.g. de O é um semi-circulo de diâmetro AC
> l.g. de O' é um semi-circulo de diâmetro BC

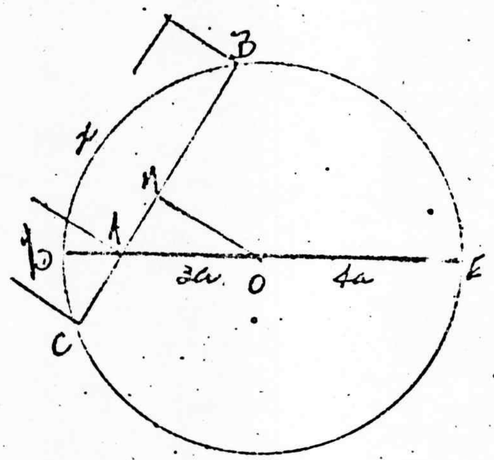
7a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO: Seja um círculo de centro O e raio R igual a $4a$. Por um ponto A sôbre um diâmetro DE, tal que OA igual a $3a$, traça-se uma corda BAC fazendo com OA um ângulo de 60^o ($O\hat{A}B = 60^o$).

Pede-se:

a) Calcular os segmentos $\underline{AB}$ e $\underline{AC}$ $(AB > AC)$.

b) Calcular o percurso total descrito pelo ponto $\underline{M}$, médio da corda $\underline{BC}$, quando esta dá um giro de 360^o em tôrno de $\underline{A}$.



a) Fazendo $AB = x$ e $AC = y$, temos:

1) $xy = AD \times AE$

2) $x - y = 2\ AM$

Do triângulo AMO (retângulo em M)

$OA = 2\ AM = 3\ a$

Assim: $xy = 7\ a^2$

$x - y = 3\ a$

Resolvido o sistema:

$$y = AC = \frac{a}{2}\ (\sqrt{37} - 3)$$

$$x = AB = \frac{a}{2}\ (\sqrt{37} + 3)$$

b) Quando BC gira em tôrno de A de 180^o o ponto M descreverá um círculo de diâmetro OA. Girando de 360^o percorrerá duas circunferências de círculo de mesmo diâmetro. Assim:

Percurso $l = 2 \times \pi \times OA = 2 \times \pi \times 3a = 6\pi\ a$

8a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

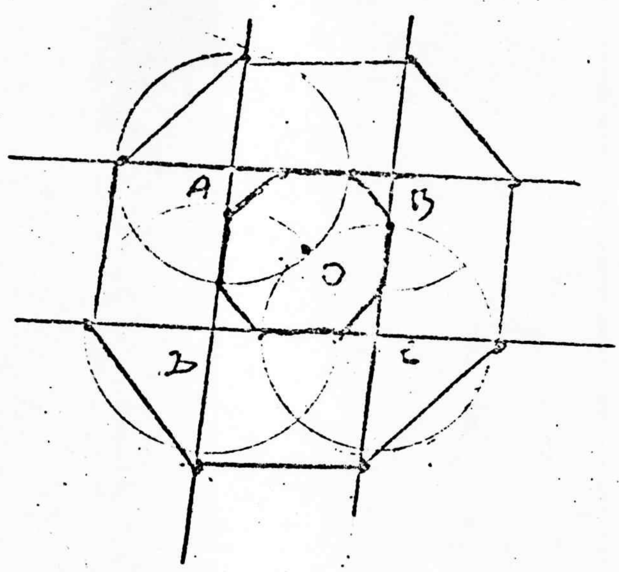
ENUNCIADO: Um quadrado $\underline{ABCD}$ tem lado unitário e centro $\underline{O}$. Sejam (A), (B), (C) e (D) as circunferências com centro em cada vértice e que passa por $\underline{O}$.

Pede-se:

a) Identificar o polígono (P) cujos vértices são determinados por (A), (B), (C) e (D) sôbre os lados do quadrado, calculando os seus lados e seus ângulos internos.

b) Identificar o polígono (P') cujos vértices são determinados por (A), (B), (C) e (D) sôbre os prolongamentos dos lados do quadrado, calculando os seus ângulos inter

c) *Demonstrar que (P) e (P') são homotéticos e calcular as possíveis razões de homotetia.*



a) *(P) é um octogono pois sôbre cada lado do quadrado tem 2 vértices de (P). Os lados que têm o mesmo suporte que os lados do quadrado medem:*

$$1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$$

Os lados que não têm esta situação medem:

$$\sqrt{2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

Logo (P) é equilátero.
Mas os ângulos de (P) medem:

$$180^o - 45^o = 135^o$$

Logo (P) é equiângulo.
Concluimos que (P) é um octogono regular.

b) *(P') é um octogono pois cada círculo traçado determina 2 vértices de (P') sôbre os prolongamentos dos lados do quadrado.*
4 lados de (P') são paralelos aos lados do quadrado e com medida 1, pois os círculos traçados determinam retângulos com bases, AB, BC, CD, DA. Os outros 4 lados de (P') medem:

$$\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

(P') é equilátero: seus ângulos medem: $45^o + 90^o = 135^o$ logo (P') é equiângulo.

Concluimos que (P') é um octogono regular.

c) (P) e (P') são semelhantes (por serem octogonos regulares) e tem lados paralelos (por construção): logo (P) e (P') são homotéticos.

Como $\underline{O}$ é centro de simetria da figura, $\underline{O}$ é centro de homotético. Há 2 homotéticos que podem ser considerado uma com razão positiva e outra com razão negativa, (ambas com mesmo valor absoluto). Êste valor da razão é a razão dos lados, ou seja:

$$\rho = \pm \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \pm (\sqrt{2} + 1).$$

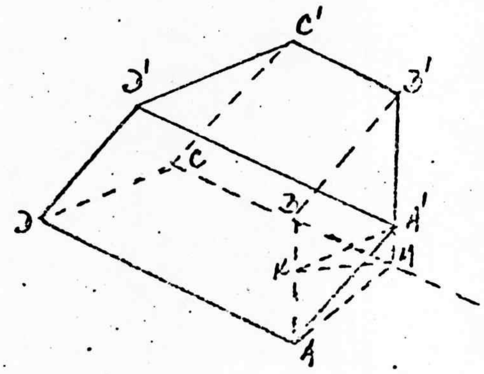
RESPOSTA:

a) (P) é octogono regular.
b) (P') é octogono regular.
c) $P = \pm (\sqrt{2} + 1)$

9a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO: A base de um prisma oblíquo é um semi-hexágono regular $\underline{ABCD}$ inscrito em um círculo de diâmetro $AD = 2R$. Seja a face oposta o polígono $\underline{A'B'C'D'}$. A face $\underline{ADD'A'}$ é um retângulo tal que $AA' = R$ e a projeção ortogonal do vértice $\underline{A}$ sôbre o plano da base está sôbre o prolongamento de $\underline{BC}$. Calcular o volume e a área total do prisma, em função de $\underline{R}$.

OBS.: Considerando A' e não A como está no enunciado:



- Cálculo do volume

Seja M a projeção de A' sôbre o plano da base.

Volume $V = S_{ABCD} \cdot A'M$

A base é um trapézio de bases 2R e R e cuja altura AM é o apótema do hexágono de lado R $\Longrightarrow$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2R + R) \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

No triângulo retângulo AMA' (retângulo em M):

$AA' = R$

$\overline{AM} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\overline{A'M}^2 = R^2 - \dfrac{3R^2}{4} = \dfrac{R^2}{4} \implies \overline{A'M} = \dfrac{R}{2}$

Assim:

$$V = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{R}{2} = \frac{3R^3\sqrt{3}}{8}$$

- <u>*Cálculo da área total*</u>

A área total do prisma será:

$$S_t = S_{ABCD} + S_{A'B'C'D'} + S_{ABB'A'} + S_{CDD'C'} + S_{ADD'A'} + S_{BCC'B'}$$

$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ (já calculada)

$S_{ADD'A'} = 2R^2$ como retângulo de lados $2R$ e R

$S_{BCC'B'} = R^2$ como quadrado de lado R

$S_{ABB'A'} = S_{CDD'C'} = \overline{AB} \times \overline{A'K}$

No triângulo retângulo AMB (retângulo em M), cuja altura é $MK \implies \overline{AB} \times \overline{MK} = \overline{MB} \times \overline{MA}$

$$\left.\begin{aligned} MB &= \frac{R}{2} \\ \overline{MA} &= \frac{R\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \overline{MK} = \frac{R\sqrt{3}}{4}$$

No triângulo retângulo $A'MK$ (retângulo em M)

$$\overline{A'K}^2 = \overline{MA'}^2 + \overline{MK}^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{3R^2}{16} = \frac{7R^2}{16} \implies \overline{A'K} = \frac{R\sqrt{7}}{4}$$

$$S_{ABB'A'} = S_{CDD'C'} = R \cdot \frac{R\sqrt{7}}{4} = \frac{R^2\sqrt{7}}{4}$$

Assim: $S_t = 2 \times \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \dfrac{R^2\sqrt{7}}{4} + 2R^2 + R^2 \implies$

$$S_t = \frac{R^2}{2} (3 \sqrt{3} + \sqrt{7} + 6)$$

RESPOSTA:

$$\boxed{V = \frac{3R^3 \sqrt{3}}{8} \qquad S_t = \frac{R^2}{2} (6 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7})}$$

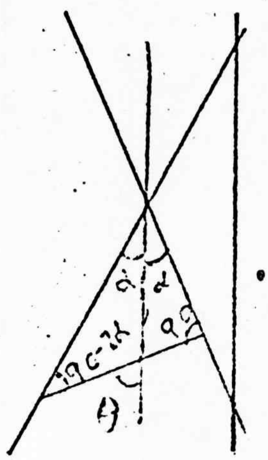
10a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO: Uma seção plana de um cone de revolução é uma elipse de excentricidade $\sqrt{3}/3$ cujo eixo maior é perpendicular a uma geratriz dêste sólido.

Pede-se:

a) Determinar o ângulo entre o eixo do cone e suas geratrizes.

b) Considere-se sôbre o mesmo cone a hipérbole H, de excentricidade máxima, cujo eixo transverso, $2a$., é igual a 10cm. Calcular no plano de H, a área da superfície compreendida entre as assíntotas e uma tangente qualquer à hipérbole.



a) $\theta = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$

Pelo teorema de Dandelin

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\cos(90 - \alpha)}{\cos} = tg\,\alpha$$

logo $\alpha = 30^o$

b) Para H ter excentricidade máxima a seção deve ser paralela ao eixo da série:

$$e = \frac{\cos\ 0^o}{\cos\ 30^o} = 2$$

Como $2a = 10$ cm $\qquad a = 5$ cm

$c = 2 \times 5$ cm $= 10$ cm

$b = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

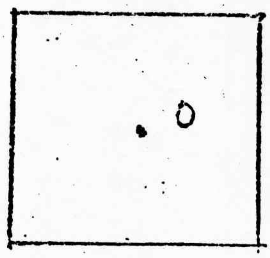
11a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

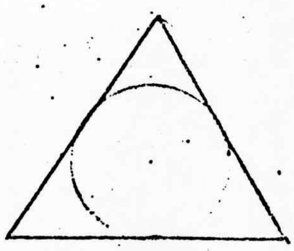
ENUNCIADO: Tem-se um octaedro (O) regular, de aresta $\underline{a}$; seja (E) a esfera cuja superfície passa pelos pontos médios das arestas de (O).

Pede-se:

a) Calcular a porção do volume de (E) exterior a (O).

b) Calcular a porção do volume de (O) exterior a (E).





Se $\underline{O}$ é o centro de (O), a seção equitorial de (O) é um quadrado de centro O: o raio de (E) mede: $\frac{a}{2}$.

(E) secciona as faces de (O) segundo o círculo inscrito que tem raio: $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

a distância de O a uma face é:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\cdot 3}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

A (E) tem exteriormente a (O) 8 segmentos esféricos de 1 base com altura:

$$h = \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a}{6}(3 - \sqrt{6})$$

a) o volume de (E) exterior a (O) é:

$$V_1 = 8\left[\frac{\pi h^2}{3}(3R - h)\right] = 8\left[\frac{\pi}{3}\ \frac{a^2}{36}(3 - \sqrt{6})^2\left(\frac{3a}{2} - \frac{a}{6}(3-\sqrt{6})\right)\right]$$

$$= \frac{\pi a^3}{27}(18 - 7\sqrt{6})$$

b) o volume da esfera interior a (O) é:

$$V' = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_1 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^2}{8} - \frac{\pi a^3}{27}(18 - 7\sqrt{6})$$

$$= \frac{\pi a^3}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{9}(18 - 7\sqrt{6})\right.$$

O volume de (0) é:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

O volume de (0) exterior a (E) é:

$$V_2 = V - V' = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi a^3}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{9}(18 - 7\sqrt{6})\right.$$

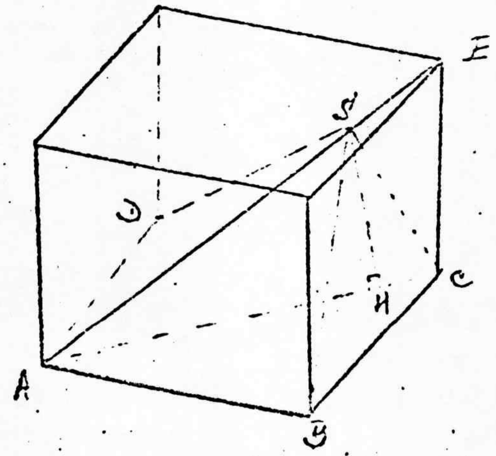
RESPOSTA:

a) $\dfrac{\pi a^3}{27}(18 - 7\sqrt{6})$

b) $\dfrac{a^3}{3}\sqrt{2} - \dfrac{\pi a^3}{3}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{9}(18 - 7\sqrt{6})\right.$

12a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO: Uma pirâmide tem por base uma das faces de um cubo de aresta a e o seu vértice S está sôbre uma diagonal dêste cubo.
Calcular o volume da pirâmide, sabendo que a soma dos quadrados das arestas concorrentes em S é igual a $4a^2$.



1) $\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 + \overline{SD}^2 = 4a^2$

2) $\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{SD}^2$

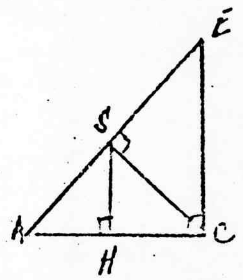
3) $\overline{SB} = \overline{SD}$

De (1), (2) e (3) $\Rightarrow$ (4) $\overline{SB} = \overline{SD} = a$

De (1) e (4) $\Rightarrow$ $\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = 2a^2$

Como $\overline{AC}^2 = 2a^2 \Rightarrow \overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{AC}^2$

O ângulo $A\hat{S}C$ é reto



$$\begin{cases} \overline{AE} = a\sqrt{3} \\ \overline{AC} = a\sqrt{2} \\ \overline{CE} = a \end{cases}$$

5) $\overline{CE} \times \overline{AC} = \overline{AE} \times \overline{SC}$

6) $\dfrac{\overline{SH}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{CE}}$

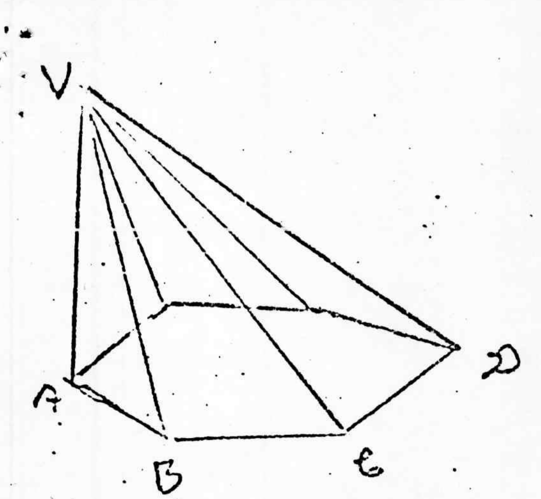
De (5) e (6) $\Rightarrow$ $\overline{SH} = \dfrac{\overline{CE} \cdot \overline{AC}^2}{\overline{AE}^2} = \dfrac{2}{3}\, a$

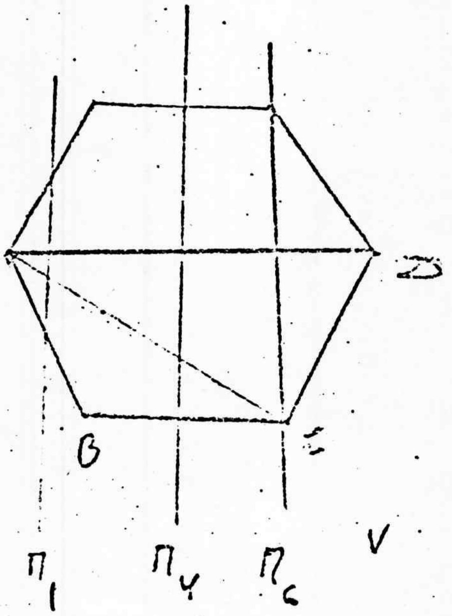
Assim: Volume $V = \dfrac{1}{3}\, a^2 \cdot \overline{SH} \Rightarrow V = \dfrac{2}{9}\, a^3$

RESPOSTA: $\boxed{V = \dfrac{2}{9}\, a^3}$

13a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO: Considere-se uma pirâmide de vértice V cuja base é um hexágono regular, ABCDEF, com 4 cm de lado; a aresta VA mede 24 cm e é perpendicular ao plano da base; seja e o eixo de simetria do hexágono, que passa por A; sejam π_1, π_4 e π_6 os planos perpendiculares a e que interceptam a pirâmide e distam respectivamente 1, 4 e 6 cm de A. Pede-se fazer o esbôço das seções determinadas na pirâmide por êsses planos, indicando as distâncias dos vértices dos polígonos seções ao plano da base da pirâmide.



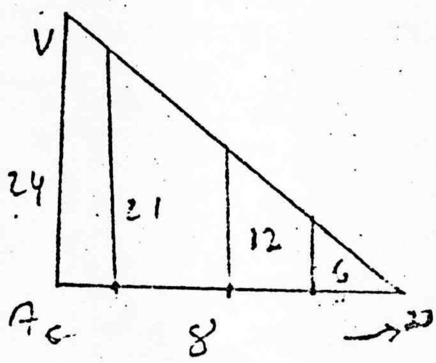


a) A seção por Π_6 é um triângulo.

A seção por Π_4 é um pentágono.

A seção por Π_1 é um heptágono.

Isto decorre do número de arestas de pirâmide que são cortadas.

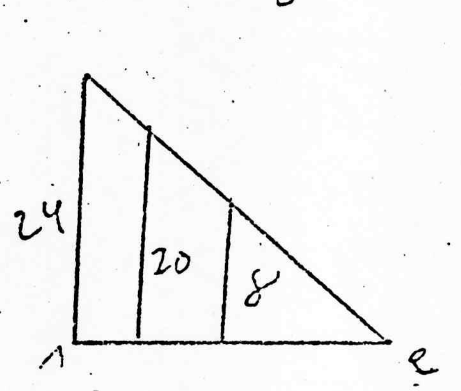


b) No plano VAD as alturas interseptadas são:

Π_1 — 21 cm

Π_4 — 12 cm

Π_6 — 6 cm

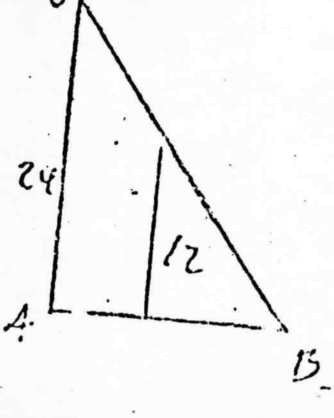


c) No plano VAC as alturas serão:

Π_4 — $\frac{2}{6} \times 24 = 8$ cm

Π_1 — $\frac{5}{6} \times 24 = 20$ cm

d) No plano VAB: a interseção por Π_1 está a 12 cm de altura (meio de AB).



e) Os esboços decorrem imediatamente: