IME – 1970/1971 – GEOMETRIA/TRIGONOMETRIA
(O Globo, 9/12/70, pág. 22)

Cento e oitenta e seis candidatos submeteram-se, ontem, à prova de Geometria e Trigonometria, no vestibular do Instituto Militar de Engenharia. O exame foi considerado difícil, pela maioria dos candidatos. O GLOBO publica as respostas corretas de tôdas as questões, fornecidas pela equipe de professôres do Curso PLANCK. Eis o gabarito: 1—D, 2—F, 3—E, 4—A, 5—D, 6—B, 7—D, 8—A, 9—C, 10—D, 11—C, 12—F, 13—B, 14—C e 15—F.

1ª QUESTÃO

ENUNCIADO: A área de um elipse é igual a quatro quintos da área de seu circulo principal.

Calcule a excentricidade da elipse, sabendo-se que o arco de 2160 minutos da circunferência do círculo principal tem o comprimento de π centímetros.

$$S_{elipse} = \pi ab$$

$$S_{círculo} = \pi a^2$$

$$\frac{S_{elipse}}{S_{círculo}} = \frac{\pi ab}{\pi a^2} = \frac{b}{a} = \frac{4}{5} \quad \text{donde} \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Resp: D

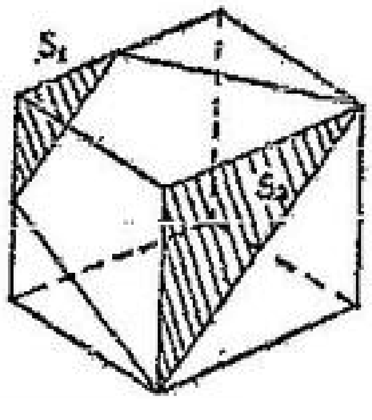
2ª QUESTÃO

ENUNCIADO: Um cubo de aresta "a" é seccionado por um plano que contém a diagonal de uma das faces e passa pelo ponto médio de uma aresta da face oposta. Calcule o volume do menor dos sólidos resultantes.

$$S_1 = \frac{a^2}{8} \qquad S_2 = \frac{a^2}{2}$$

$$V = \frac{a}{3}\left[\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{8}\cdot\frac{a^2}{2}}\right] = \frac{a}{3}\cdot\frac{7a^2}{8}$$

$$V = \frac{7a^3}{24}$$



Resp: F

3ª QUESTÃO	ENUNCIADO: Determine os valores de x que satisfazem a equação:

$$\text{arc sen}(x\sqrt{3}) = \text{arc sen } 2x - \text{arc sen } x$$

$\text{arc sen}(x\sqrt{3}) = y \therefore \text{sen } y = x\sqrt{3}$

$\text{arc sen } 2x = z \quad \therefore \quad \text{sen } z = 2x \quad \therefore \quad \cos z = \sqrt{1-4x^2}$

$\text{arc sen } x = v \quad \therefore \quad \text{sen } v = x \quad \therefore \quad \cos v = \sqrt{1-x^2}$

a equação fica: $\quad y = z - v$

$$\text{sen } y = \text{sen } (z - v) = \text{sen } z \cdot \cos v - \text{sen } v \cdot \cos z$$

$$x\sqrt{3} = 2x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-4x^2}$$

Logo $x = 0$ é raiz; a equação fica $\sqrt{3} = 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}$

$$3 + 1 - 4x^2 + 2\sqrt{3-12x^2} = 4 - 4x^2 \Leftrightarrow 12x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1/2 \; .$$

Verificação : $\quad x = 1/2 \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}$ (certa)

$\quad x = -1/2 \Rightarrow \dfrac{-\pi}{3} = \dfrac{-\pi}{2} - \left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$ (certa)

As raízes são $\quad x=0, \; x= \pm 1/2$

Resp: E

4ª QUESTÃO	ENUNCIADO: Sejam 8(oito) esferas de raio "r" tangentes entre si 3 a 3

inscritas em uma esfera de raio "R". Calcule "r" em função de "R".

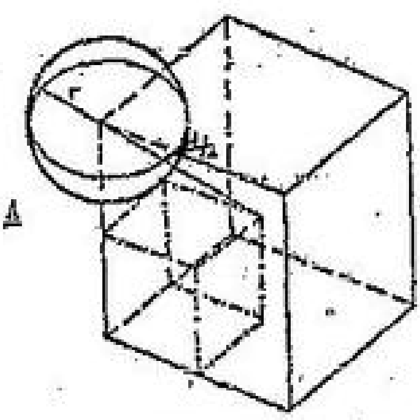
d: diagonal do cubo

2r: lado do cubo

$d = 2r\sqrt{3}$

$R = r\sqrt{3} + r \therefore r = \dfrac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$

Resp: A



5ª QUESTÃO	ENUNCIADO: Determine os valores de "x" e "y" que satisfazem as equações:

$$x + y = \pi/5$$
$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos \pi/5$$

$$\begin{cases} x + y = \pi/5 \quad \ldots (1) \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos \pi/5 \end{cases}$$

Temos que: $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

Logo, em (2), $\cos 2x + \cos 2y = 2 \cos \pi/5$

$2 \cos (x+y) . \cos (x-y) = 2 \cos (x+y)$

$\cos (x-y) = 1 \therefore x-y = 2k\pi$

Assim, o sistema se reduz a:

$$\begin{cases} x + y = \pi/5 \\ x - y = 2k\pi \end{cases} \therefore \begin{cases} x = k\pi + \pi/10 \\ y = \pi/10 - k\pi \end{cases}$$

Resp: D

6ª QUESTÃO	ENUNCIADO: Dois cones retos C e C' que têm ângulos do vértice iguais a

120° e geratrizes respectivamente iguais a 4 e 2 metros, interceptam-se de modo que os vértices coincidem e uma geratriz de C' é a altura de C. Determine a corda máxima na base de C' contida no cone C.

da figura:

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

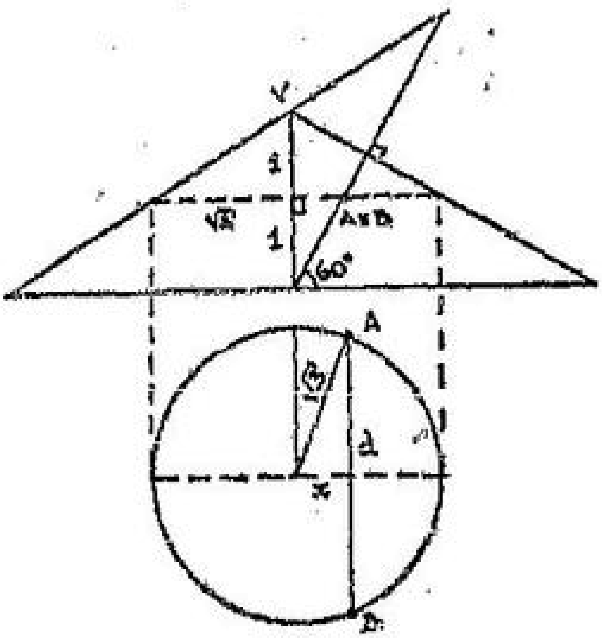
logo

$\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = 3 - \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{d}{2} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$d = 4\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Resp: E



7ª QUESTÃO	ENUNCIADO: A perpendicular às retas paralelas $\underline{D}$ e $\underline{D'}$, determina respectivamente sôbre as mesmas os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$, distantes de 2a. Toma-se um ponto $\underline{M}$ sôbre $\underline{D}$ tal que que $\overline{AM} = x$. Traça-se por $\underline{O}$, meio de $\overline{AB}$, uma perpendicular a $\overline{OM}$ que encontra D' em M'. Calcule em função de $\underline{a}$ e $\underline{x}$, o volume gerado pelo triângulo OMM' quando gira em tôrno de $\overline{AB}$.

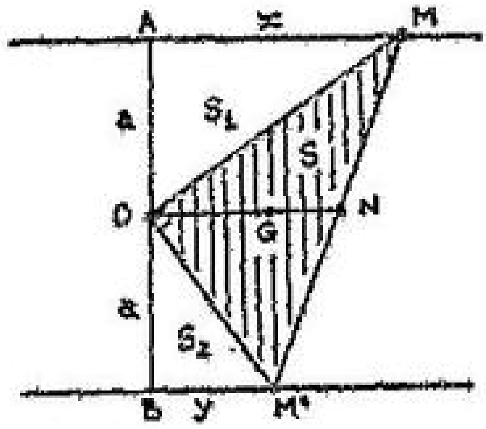
$$\frac{x}{a} = \frac{a}{y} \therefore y = \frac{a^2}{x}$$

$$S = S_1 + S_2 \therefore S = \frac{ax}{2} + \frac{a^3}{2x}$$

$$S = \frac{a}{2x}(a^2 + x^2)$$

$$ON = \frac{x + y}{2}$$

$$OG = \frac{2}{3} ON = \frac{a^2 + x^2}{3x}$$



Por Guldin:

$$V = 2\pi . OG . S \qquad V = \frac{\pi a}{3x^2}(a^2 + x^2)^2$$

Resp: $\underline{D}$

8ª QUESTÃO	ENUNCIADO: Dadas as expressões:

$$a_1 = A \text{ sen } (x + \theta)$$

$$a_2 = A \text{ sen}(x + 2\pi/3 + \theta)$$

$$a_3 = A \text{ sen}(x - 2\pi/3 + \theta)$$

$$b_1 = B \text{ sen}(x + \theta + \psi)$$

$$b_2 = B \text{ sen}(x + 2\pi/3 + \theta + \psi)$$

$$b_3 = B \text{ sen}(x - 2\pi/3 + \theta + \psi)$$

Calcule $C = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Seja $x + \theta = \gamma$

$$a_1b_1 = AB \operatorname{sen} \gamma . \operatorname{sen}(\gamma + \varphi) = \frac{AB}{2}\left[\cos\varphi - \cos(2\gamma + \varphi)\right]$$

$$a_2b_2 = AB \operatorname{sen}\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\gamma + \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) =$$

$$= \frac{AB}{2}\left[\cos\varphi - \cos\left(2\gamma + \varphi + \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$a_3b_3 = AB \operatorname{sen}\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\gamma - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) =$$

$$= \frac{AB}{2}\left[\cos\varphi - \cos\left(2\gamma + \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$U = \frac{3AB}{2}\cos\varphi - \frac{AB}{2}\left[\cos\left(2\gamma + \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(2\gamma + \varphi) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(2\gamma + \varphi + \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

Aplicando a fórmula da soma de cossenos de arcos em P.A. vem que

$$U = \frac{3}{2} AB \cos\varphi$$

Resp: A

9ª QUESTÃO	ENUNCIADO: Uma esfera de raio "R" é tangente às faces de um dos triedros

de um cubo de aresta "a". Um vértice do cubo pertence à superfície esférica. Calcule o raio "r" da interseção da esfera com o plano de uma das faces do cubo que cortam a esfera, em função apenas da aresta "a" do cubo.

observa-se que:

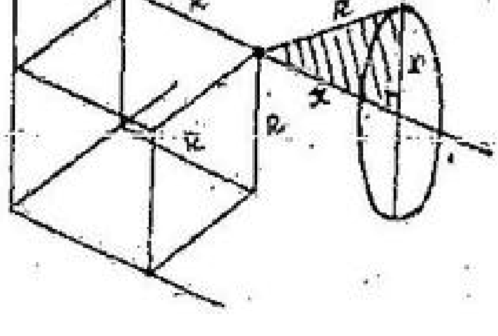
$$a\sqrt{3} = R\sqrt{3} + R \quad \therefore \quad R = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$x = a - R = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{3}) = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

o triângulo hachurado é retângulo, então:

$$r^2 + x^2 = R^2 \quad \therefore \quad r = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Resp : C



10ª QUESTÃO	**ENUNCIADO:** Um quadro retangular de $17(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ metros de altura, com sua borda inferior apoiada em uma parede vertical, faz com a mesma um ângulo α. Um observador, a $34\sqrt{2}$ metros de distância da parede, vê o quadro segundo um ângulo de 15^o. A borda inferior do quadro e os olhos do observador estão em um mesmo plano horizontal. Calcule o ângulo α

A perpendicular AC, baixada de A ao raio visual BD mede:

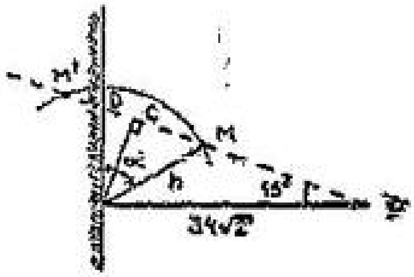
$34\sqrt{2}$ sen 15º $= 17(\sqrt{3}-1)$m

Altura h do quadro:

$17(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

A distância AD é

$34\sqrt{2}$ tg 15º $= 34(2\sqrt{2}-\sqrt{6})$



como $h > AC$ e $h > AD$, o problema admite apenas uma solução (para o ângulo M obtuso).

$$\frac{\text{sen } 15º}{17(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{\text{sen}(75º+\alpha)}{34\sqrt{2}} \therefore \text{sen}(75º+\alpha) = \text{sen } 135º$$

$$\boxed{\alpha = 60º}$$

Resp: D

11ª QUESTÃO	**ENUNCIADO:** Um retângulo ABCD de lados $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ m e $\overline{BC} = \sqrt{6}$ m, gira em tôrno de um eixo, coplanar e externo ao retângulo, que passa por A e faz um ângulo de 30^o com o lado $\overline{AB}$. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação do retângulo.

$AB = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{6}$

$AC = 2BC = 2\sqrt{6}$

$AO = \sqrt{6}$

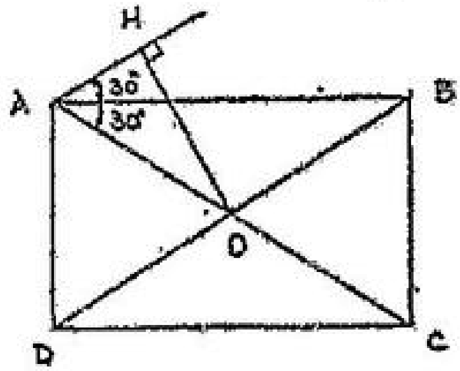
$OH = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2p_{ABCD} = 2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$

Por Guldin

$S = 2\pi . OH . 2p_{ABCD}$

$S = 12\pi(3+\sqrt{3})m^2$



Resp: C

12ª QUESTÃO	**ENUNCIADO:** Determine os valores de x que satisfazem a equação

$$7\,\text{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\,\text{sen}\, x \cos x - \cos^2 x = 4$$

$7\text{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\,\text{sen}\, x . \cos x - \cos^2 x = 4(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)$

$3\,\text{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\,\text{sen}\, x . \cos x - 5\cos^2 x = 0$

como $\cos x = 0$ não é solução, vem (dividindo por $\cos^2 x$)

$3\text{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\,\text{tg}\, x - 5 = 0$

$\text{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{2}$

1ª solução: $\text{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} \therefore x \cong k.180° + 63°21'$

2ª solução: $\text{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{2} \therefore x \cong k.180° - 39°54'$

Resp: E

13ª QUESTÃO	**ENUNCIADO:** As faces de um paralelepípedo são losangos de lado igual à $L = \sqrt{2}$ metros e diagonal menor igual ao lado. Calcule o volume do paralelepípedo

ABD é equilátero

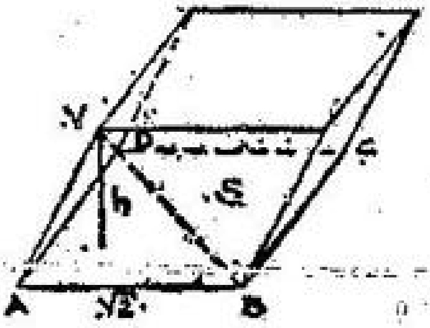
$S = 2.S_{ABD} = \sqrt{3}$

h é altura do tetraedro regular ABVD

$h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

logo

$V = S.h = 2m^3$



Resp: B.

14ª QUESTÃO	**ENUNCIADO:** Sejam "n" circunferências de raio R, tangentes entre si duas a duas e tendo seus centros sôbre os vértices de um polígono regular. Calcule a área exterior às circunferências e compreendida entre elas em função de R e n.

$$\alpha = \frac{\pi}{n}(n-2)$$

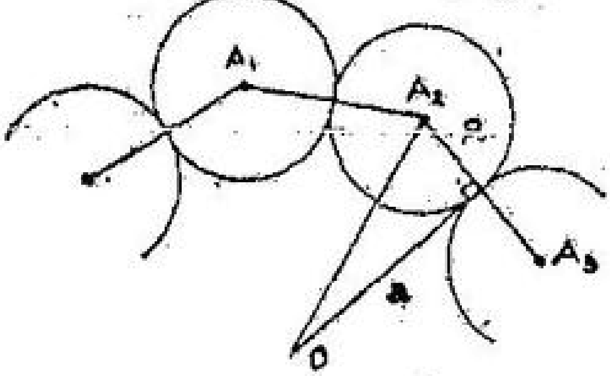
$$S = S_{A_1 \ldots A_n} - n\frac{\alpha R^2}{2}$$

da figura: $\frac{a}{R} = tg\frac{\alpha}{2} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = ctg\frac{\pi}{n}$

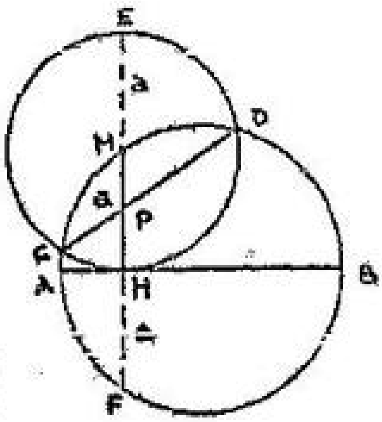
logo: $a = R\,ctg\frac{\pi}{n}$, então $S_{A_1 \ldots A_n} = n\,R\,a = n\,R^2 ctg\frac{\pi}{n}$

então: $S = R^2\left[n\,ctg\frac{\pi}{n} - \left(\frac{n-2}{2}\right)\pi\right]$

Resp: C



15ª QUESTÃO	**ENUNCIADO:** Seja M um ponto da circunferência de círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e H a projeção de M sôbre o diâmetro. Traçando-se um segundo círculo com centro em M e raio $r = \overline{MH}$, a corda $\overline{CD}$ comum aos dois círculos intercepta o segmento $\overline{MH}$ em um ponto P. Determine o valor da razão $\frac{\overline{PM}}{\overline{PH}}$.



$$PC.PD = PH.PE = PM.PF$$

logo: $\frac{PM}{PH} = \frac{PE}{PF}$

mas, $PE = a + PM$

$PF = a + PH$

então

$$\frac{PM}{PH} = \frac{a + PM}{a + PH} = \frac{a}{a} = 1$$

Resp: E