PROVA DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

1a. QUESTÃO:

ENUNCIADO: A área de um elipse é igual a quatro quintos da área de seu círculo principal.
Calcule a excentricidade da elipse, sabendo-se que o arco de 2160 minutos da circunferência do círculo tem o comprimento de π centímetros.

Respostas:

A) 0,3	( )	D) 0,6	(x)
B) 0,4	( )	E) 0,8	( )
C) 0,5	( )	F) N.R.A.	( )

SOLUÇÃO:

Área da elipse: $S_e = \pi ab$

Área do círculo principal: $S_c = \pi a^2$

$$\frac{S_e}{S_c} = \frac{\pi ab}{\pi a^2} = \frac{b}{a} = \frac{4}{5} \Longrightarrow b = \frac{4}{5}a$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi a \longrightarrow 180 \times 60' = 10.800' \\ \pi \longrightarrow 2.160' \end{array}\right\} \Rightarrow a = 5$$

$$b = \frac{4}{5}a = 4 \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0,6$$

2a. QUESTÃO:

ENUNCIADO: Um cubo de aresta "a" é seccionado por um plano que contém a diagonal de uma das faces e passa pelo ponto médio de uma aresta da face oposta. Calcule o volume do menor dos sólidos resultantes.

Respostas:

A) $2(a^3 - 2)$ ( )

B) $\frac{1}{3}(a^3 - 1)$ ( )

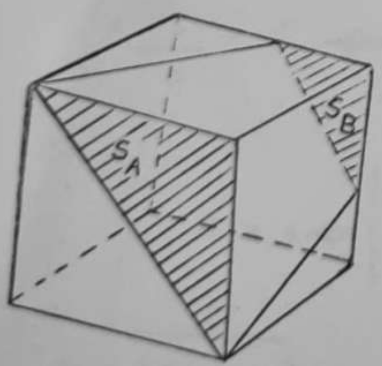
C) $\frac{1}{3} a^3$ ( )

D) $3(a^3 - 1)$ ( )

E) $\frac{\sqrt{3}}{3}(1 - a^3)$ ( )

F) N.R.A. (x)

SOLUÇÃO:



$$V = \frac{a}{3}\left(S_A + S_B + \sqrt{S_A S_B}\right)$$

$$S_A = \frac{a^2}{2}$$

$$S_B = \frac{a^2}{8}$$

$$V = \frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8} + \sqrt{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{8}}\right)$$

$$V = \frac{7a^3}{24}$$

3a. QUESTÃO:

ENUNCIADO: Determine os valores de x que satisfaçam a equação:

$$\text{arc sen } (x\sqrt{3}) = \text{arc sen } 2x - \text{arc sen } x$$

Respostas:

A) $x = 0$ ( )

B) $x = \pm 1$ ( )

C) $x = 0,\ x = \pm 1$ ( )

D) $x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$ ( )

E) $x = 0,\ x = \pm 1/2$ (x)

F) N.R.A.

SOLUÇÃO:

Façamos $\text{arc sen } 2x = u \Rightarrow \text{sen} u = 2x \quad , \cos u = \sqrt{1 - 4x^2}$

$\text{arc sen } x = v \Rightarrow \text{sen} v = x \quad , \cos v = \sqrt{1 - x^2}$

$\text{arc sen } (x\sqrt{3}) = u - v$

$x \ \ 3 = \text{sen } (u - v) = \text{sen } u, \cos v - \text{sen } v, \cos u$

$x\sqrt{3} = 2x\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - 4x^2}$

Eliminando a raiz $x = 0$, vem

$\sqrt{3} = 2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - 4x^2}$

$\sqrt{3} - 2\sqrt{1 - x^2} = -\sqrt{1 - 4x^2}$

$4\sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} = -6$

$48\,(1 - x^2) = 36 \qquad \therefore\ x = \pm 1/2$

Verifica-se, por substituição direta, que $x=0$ e $x\pm 1/2$ satisfazem ã equação dada.

4a. QUESTÃO:

ENUNCIADO: Sejam 8(oito) esferas de raio "r" tangentes entre si 3 a 3 inscritas em uma esfera de raio "R". Calcule "r" em funçaõ de "R".

Respostas:

A) $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$ (x)

B) $\sqrt{3R}$ ( )

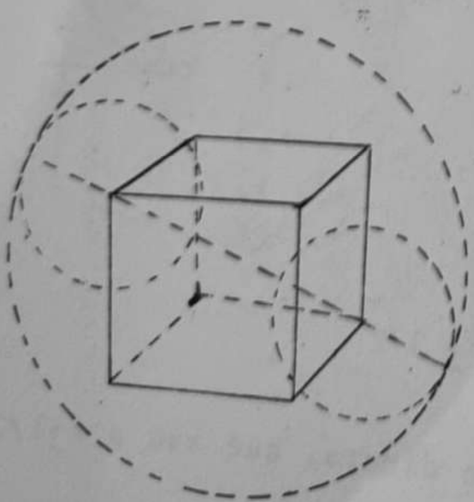
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ ( )

D) $\frac{R\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$ ( )

E) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ ( )

F) N.R.A. ( )

SOLUÇÃO:



Os centros das esferas interiores estão sôbre os vértices de um cubo de aresta 2r. O diâmetro da esfera envolvente é

$$2R = r + d + r = d + 2r,$$

onde $d = 2r\sqrt{3}$ é a diagonal do cubo.

Então:

$$2R = 2r\sqrt{3} + 2r$$

$$r = \frac{R}{\sqrt{3}+1}$$

$$r = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

5a. QUESTÃO:

ENUNCIADO: Determine os valores de "x" e "y" que satisfaçam as equações:

$x + y = \pi/5$

$\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y = 1 - \cos \pi/5$

Respostas:

A) $x = 0,\ y = \pi/5$ ( )

B) $x = y = K\pi \pm \pi/10$ ( )

C) $x = 2K\pi + \pi/5,\ y = 2K\pi - \pi/5$ ( )

D) $x = K\pi + \pi/10,\ y = \pi/10 - K\pi$ (x)

E) $x = \pi/2 + K\pi,\ y = -K\pi - 3\pi/10$ ( )

F) N. R. A. ( )

SOLUÇÃO:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\text{sen}^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$$

$$\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y = \frac{2 - \cos 2x - \cos 2y}{2} = 1 - \cos \frac{\pi}{5}$$

Daí: $\cos 2x + \cos 2y = 2 \cos \frac{\pi}{5}$

$$\cos (x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos \frac{\pi}{5}$$

Porém $\cos(x+y) = \cos \frac{\pi}{5}$, logo $\cos (x-y) = 1$

$$x - y = 2K\pi \quad \text{e} \quad x + y = \frac{\pi}{5}$$

$$x = K\pi + \frac{\pi}{10} \qquad y = \frac{\pi}{10} - K\pi$$

6a. QUESTÃO

ENUNCIADO: Dois cones retos C e C' que têm ângulos do vértice i- guais a 120^o e geratrizes respectivamente iguais a e 2 metros, interceptam-se de modo que os vértices co- incidem e uma geratriz de C' é a altura de C. Determi- ne a corda máxima na base de C' contida no cone C.

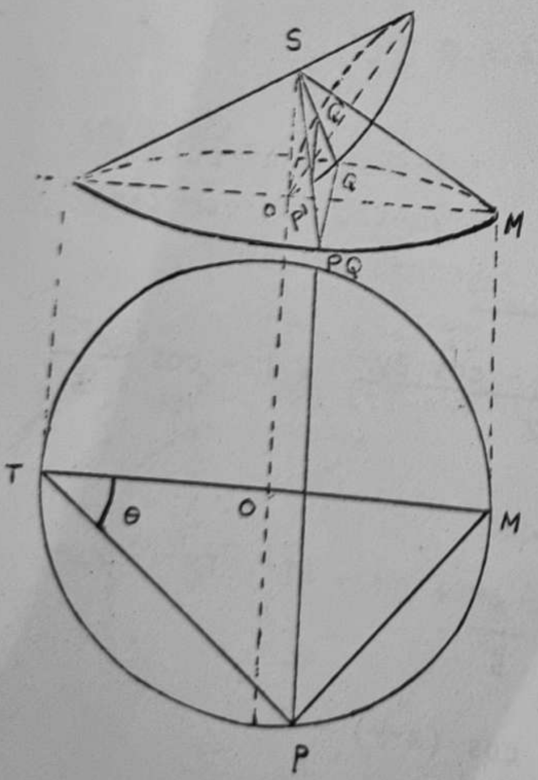
Respostas:

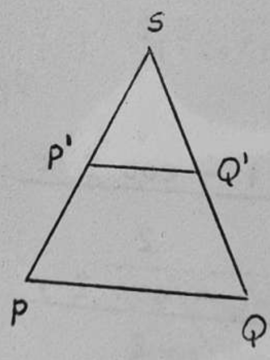
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m ( ) B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ M (x)

C) $3\sqrt{2}$ m ( ) D) 1 m ( )

E) $\sqrt{6}$ m ( ) F) N. R. A. ( )

SOLUÇÃO:





$\overline{SM} = 4$

$\overline{SO} = \overline{SM}\cos 60^o = 2$

$\overline{SP} = \overline{SQ} = \overline{SM} = 4$

$SQ' = 2$

$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{S'Q'}}{\overline{SQ}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ΔPSM é equilátero, pois $\overline{SP} = \overline{SM}$ e $\widehat{PSM} = 60^o$. Então; $\overline{PM} = 4$

$\overline{TM} = 2\,\overline{OM} = 2 \times 4 \text{ sen } 60^o = 4\sqrt{3}$

$\overline{TP} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (4)^2} = 4\sqrt{2}$

$\overline{RP} = TP \text{ sen } \theta$

$\text{sen } \theta = \frac{\overline{PM}}{\overline{TM}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overline{RP} = (4\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

$\overline{PQ} = 2 \times \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ $P'Q' = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

7a. QUESTÃO

ENUNCIADO: A perpendicular às retas paralelas D e D', determina respectivamente sôbre as mesmas pontos A e B, distantes de 2a. Toma-se um ponto M sôbre D tal que $\overline{AM} = x$. Traça-se por O, meio de $\overline{AB}$, uma perpendicular a $\overline{OM}$ que encontra D' em M'. Calcule em função de a e x o volume gerado pelo triângulo OMM' quando gira em tôrno de $\overline{AB}$.

Respostas:

A) $\pi(a + x)^3$ ( )

B) $a\left(\frac{a^2+x^2}{\pi}\right)$ ( )

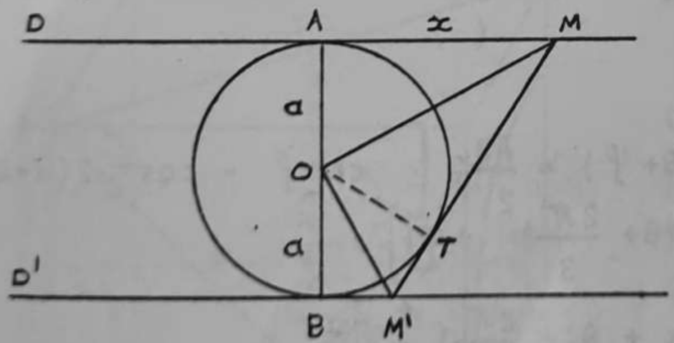
C) $\frac{a^2(a+x)}{\pi}$ ( )

D) $\frac{\pi a}{3x^2}(a^2+x^2)^2$ (x)

E) $\frac{\pi}{6x}(a^2+x^2)^2$ ( )

F) N.R.A. ( )

SOLUÇÃO:



Traça-se o círculo de diâmetro AB, que tangencia MM' em T

$\overline{OT} = a$

$V = 1/3\ (OT \cdot S_{MM'})$

onde $S_{MM'} = \pi(AM + BM') \times MM'$

porém $AM = MT$ e $BM' = TM' \Longrightarrow AM + BM' = MT + TM' = MM'$

e $S_{MM'} = \pi\ \overline{MM'}^2$

$$V = \frac{\pi a}{3x^2}(a^2 + x^2)^2$$

8a. QUESTÃO

ENUNCIADO: Dadas as expressões:

$a_1 = A \operatorname{sen}(x + \theta)$

$a_2 = A \operatorname{sen}(x + 2\pi/3 + \theta)$

$a_3 = A \operatorname{sen}(x - 2\pi/3 + \theta)$

$b_1 = B \operatorname{sen}(x + \theta + \varphi)$

$b_2 = B \operatorname{sen}(2 + 2\pi/3 + \theta + \varphi)$

$b_3 = B \operatorname{sen}(x - 2\pi/3 + \theta + \varphi)$

Calcule $C = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Respostas:

A) $(3\,AB/2)\cos\varphi$ (x)
B) $3\,AB \operatorname{sen}(x + \theta)$ ( )
C) $(3\,AB/2)\cos(2x + \theta + \varphi)$ ( )
D) $AB \operatorname{sen}(\varphi + \theta)$ ( )
E) $(AB/2)\cos(x + \theta + \varphi)$ ( )
F) N. R. A: ( )

SOLUÇÃO:

$$a_1 b_1 = A \operatorname{sen}(x+\theta)\, B \operatorname{sen}(x+\theta+\varphi) = \frac{AB}{2}\left\{\cos\varphi - \cos\left[2(x+\theta)+\varphi\right]\right\}$$

$$a_2 b_2 = AB\left\{\cos\varphi - \cos\left[2\left(x+\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\varphi\right]\right\} \frac{}{}$$

$$a_3 b_3 = \frac{AB}{2}\left\{\cos\varphi - \cos\left[2\left(x+\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\varphi\right]\right\}$$

$$C = \frac{3}{2} AB\cos\varphi - \frac{AB}{2}\left\{\cos(2x+2\theta+\varphi) + \cos\left(2x+2\theta+\frac{4\pi}{3}+\varphi\right) + \cos\left(2x+2\theta-\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)\right\} = \frac{3}{2}AB\cos\varphi - \frac{AB}{2}\left\{\cos(2x+2\theta+\varphi) - \frac{1}{2}\cos(2x+2\theta+\varphi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(2x+2\theta+\varphi)\right\}$$

$$C = \frac{3\,AB}{2}\cos\varphi$$

9a. QUESTÃO

ENUNCIADO: Uma esfera de raio "R" é tangente às faces de um dos triedos de um cubo de aresta "a". Um vértice do cubo pertence à superfície esférica. Calcule o raio "r" da interseção da esfera com o plano de uma das faces do cubo que cortam a esfera, em função apenas da "a" do cubo.

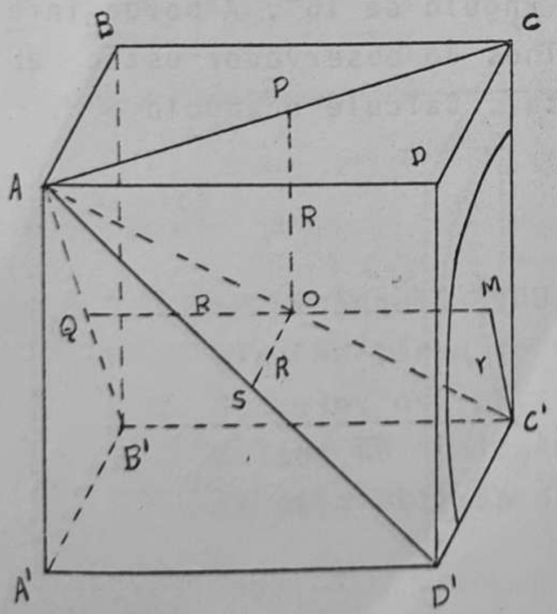
Resposta:

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ( )　　B) $(\sqrt{2}-1)a$ ( )

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)a$ (x)　　D) $(1-\sqrt{3})a$ ( )

E) $\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}a$ ( )　　F) N. R. A. ( )

SOLUÇÃO:



O - centro da esfera de raio R

M - centro da interseção da esfera com o plano da face do cubo.

Do $\Delta OMC'$, retângulo em M:

$\overline{MO}^2 + \overline{MC'}^2 = \overline{OC'}^2$

$\overline{MO} = a - R$

$\overline{OC'} = R$

$MC' = r$

$(a-R)^2 + r^2 = R^2 \Longrightarrow r = \sqrt{2Ra-a^2}$

$\Delta APO \sim \Delta ACC'$: $\frac{R}{a} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC'}} = \frac{AO}{a\sqrt{3}} \Longrightarrow \overline{AO} = R\sqrt{3}$

Podemos escrever $\overline{AO} + \overline{OC'} = \overline{AC'}$

Ou　　$R\sqrt{3} + R = a\sqrt{3} \Longrightarrow R = a/2(3-\sqrt{3})$

CONTINUAÇÃO DA 9a. QUESTÃO

Substituindo (2) em (1) vem

$$r = \sqrt{\frac{2a(3-\sqrt{3})}{2} \cdot a - a^2} = a\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

donde $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\,a$

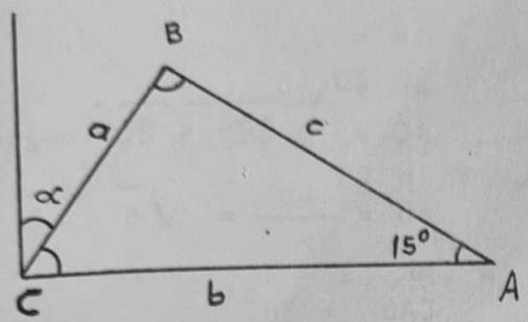
10a. QUESTÃO

ENUNCIADO: Um quadro retangular de $17(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ metros de altura, com sua borda inferior apoiada em uma parede vertical, faz com a mesma um ângulo α. Um observador, a $34\sqrt{2}$ metros de distância da parede, vê o quadro segundo um ângulo de 15^o. A borda inferior do quadro e os olhos do observador estão em um mesmo plano horizontal. Calcule o ângulo α.

Respostas:

A) 15^o ( )
B) 30^o ( )
C) 45^o ( )
D) 60^o (x)
E) 75^o ( )
F) N.R.A. ( )

SOLUÇÃO DA 10a. QUESTÃO:



Lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$$

$$\text{sen } A = \text{sen } 15^\circ = \text{sen } (45-30) =$$

$$= \text{sen } 45^\circ \cos 30 - \text{sen } 30 \cos 45 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} \text{ sen } 15 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad B = \begin{cases} 45^\circ \\ 135^\circ \end{cases}$$

$$\alpha = 90 - C = 90 - \left[180 - (135 + 15)\right] = 60$$

11a. QUESTÃO

ENUNCIADO: Um retângulo ABCD de lados $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ m e $\overline{BC} = \sqrt{6}$m, gira em tôrno de um eixo, coplanar e externo ao retângulo, que passa por A e faz um ângulo de 30° com o lado $\overline{AB}$. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação do retângulo.

Respostas:

A) $\sqrt{3}/2$ m^2 ( )

B) $2\pi/\sqrt{3}$ m^2 ( )

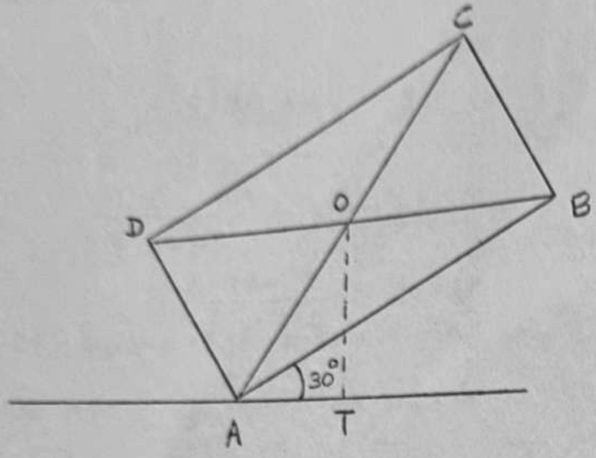
C) $12\pi(\sqrt{3}+3)$m^2 (x)

D) $\pi/2$ $(\sqrt{3}+6)$m^2 ( )

E) $\pi/6$ m^2 ( )

F) N.R.A. ( )

SOLUÇÃO DA 11a. QUESTÃO



$AB = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{6}$

$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = 2\sqrt{6}$

$AO = \dfrac{AC}{2} = \sqrt{6}$

$\widehat{CAB} = 30^\circ$

$AT = AO \cos 60 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\overline{OT} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AT}^2} = \sqrt{6 - \dfrac{6}{4}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Perímetro do retângulo: $2p = 2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$

Pelo Teorema de Guldin: $S = 2\pi - \overline{OT} \, . \, 2p$

$S = 12\pi(\sqrt{3} + 3)\ m^2$

12a. QUESTÃO.

ENUNCIADO: Determine os valores de x que satisfazem a equação:

$7 \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x = 4$

Respostas:

A) $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ e $x = k\pi + \dfrac{3\pi}{5}$ ( )

B) $x = k\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$ ( )

C) $x = k\pi + \pi/3$ e $x = k\pi + 5\pi/6$ ( )

CONTINUAÇÃO DA 12a. QUESTÃO

D) $x = \pi$ e $x = k\pi - \dfrac{\pi}{2}$ ( )

E) $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{8}$ ( )

F) N. R. A. (x)

SOLUÇÃO:

$$7\,\text{sen}^2x - 2\sqrt{3}\,\text{sen}x\cos x - \cos^2x = 4\,(\text{sen}^2x + \cos^2x)$$

$$3\,\text{sen}^2x - 2\sqrt{3}\,\text{sen}x\cos x - 5\cos^2x = 0$$

Dividindo por $\cos^2x \neq 0$

$$3\,\text{tg}^2x - 2\sqrt{3}\,\text{tg}x - 5 = 0$$

$$\text{tg}x = \frac{2\sqrt{3} \pm 6\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{2}$$

Verifica-se que $\cos x = 0$ não é solução

Então $x = \text{arctg}\,(\sqrt{3}/3 + \sqrt{2})$

e $x = \text{arctg}\,(\sqrt{3}/3 - \sqrt{2})$

são as soluções

13a. QUESTÃO

ENUNCIADO: As faces de um paralelepípedo são losangos de lados iguais a $\ell = \sqrt{2}$ metros e diagonal menor igual ao lado. Calcule o volume do paralelepípedo.

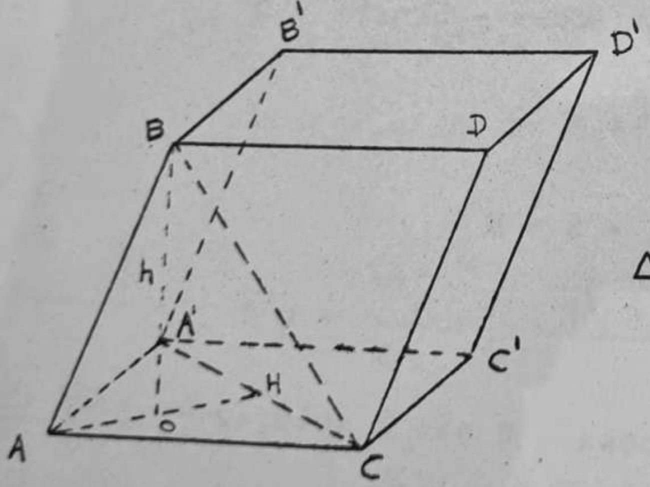
Respostas:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m^3 ( ) B) 2 m^3 (x)

C) 3 m^3 ( ) D) $2\sqrt{3}$ m^3 ( )

E) $2\sqrt{2}$ m^3 ( ) F) N. R. A. ( )

SOLUÇÃO:



Volume do paralelepípedo:

$V = B \times h$

$B = \frac{dd'}{2}$

$\Delta AA'C$: $\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{HC}^2 =$

$= (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2}/2)^2 = 3/2$

$\overline{AH} = \sqrt{6}/2$

$d' = 2\overline{AH} = \sqrt{6}$ $\quad d = \ell = \sqrt{2}$

$B = 1/2\ \sqrt{6}\ \sqrt{2} = \sqrt{3}$

O tetraedro ABCA' é regular ($BC = CA' = A'B = AB = \sqrt{2}$)

ΔAHC: $AH = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{HC}^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$

ΔBOA: h a $\overline{BO} = \sqrt{\overline{AB} - \overline{AO}^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{3}} = 2\sqrt{3}/3$ $\therefore$ $V = B.h$

Finalmente: $V = 2\ m^3$

14a. QUESTÃO

ENUNCIADO: Sejam "n" circunferências de raio R, tangente entre si duas a duas e tendo seus centros sôbre os vértices de um polígono regular. Calcule a área exterior às circunferências e compreendida entre elas, em função de R e n.

Respostas:

A) $R^2 \left(n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}\right)$ ( )

B) $R^2 \operatorname{tg} \frac{(n-1)}{2}\pi$ ( )

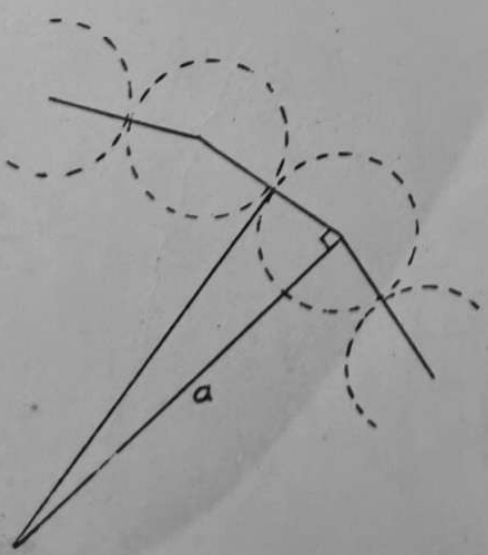
C) $R^2 \left[n \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n} - \frac{(n-2)}{2}\pi\right]$ (x)

D) $R^2 \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ ( )

E) $R^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ ( )

F) N. R. A. ( )

SOLUÇÃO:



Seja A área que se deseja calcular. Temos que $A = A_p - nA_s$,

onde A_p é a área do polígono regular de n lados ($\ell = 2R$) e As é a área de um setor circular.

$$A_p = \frac{n\ell^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}, \quad \text{com } \ell = 2R$$

e $\alpha = \frac{2\pi}{n}$

$$A_p = n R^2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$$

CONTINUAÇÃO DA SOLUÇÃO DA 14a. QUESTÃO

$$A_s = \frac{\beta R^2}{2} \qquad \beta = \left(\frac{n-2}{n}\right)\pi \qquad A_s = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\pi R^2}{2}$$

$$A = R^2 \left[n \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n} - \left(\frac{n-2}{2}\right)\pi \right]$$

15a. QUESTÃO

ENUNCIADO: Seja M um ponto de circunferência de círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e H a projeçaõ de M sôbre o diâmetro. Traçando-se um segundo círculo com centro M e raio $R=\overline{MH}$ a corda $\overline{CD}$ comum aos dois círculos intercepta o segmento $\overline{MH}$ em um ponto P. Determine o valor da razão $\dfrac{\overline{PM}}{PH}$.

Respostas:

A) 1/2 ( )

B) 1/8 ( )

C) 2 ( )

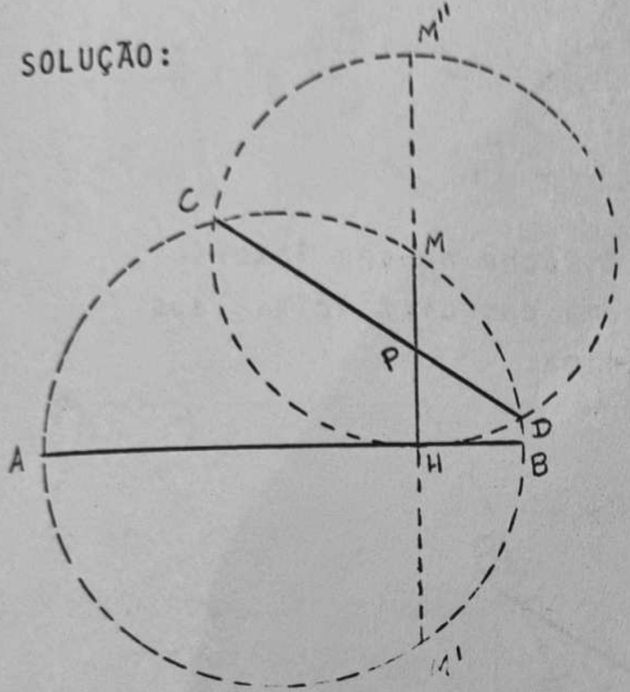
D) 3/2 ( )

E) 1/4 ( )

F) N.R.A.(x)

15a. QUESTÃO - CONTINUAÇÃO

SOLUÇÃO:



A corda CD comum aos dois círculos é o eixo radical dêstes círculos. Como P pertence ao eixo radical, sua potência em ralação a um dos círculos é igual à potência em relação ao outro:

$$\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = \overline{PM''} \cdot \overline{PH}$$

$$\overline{PM'} = \overline{PH} + r$$

$$\overline{PM''} = \overline{PM} + r$$

$$\overline{PM}\,(\overline{PH} + r) = (\overline{PM} + r)\,PH$$

$$\overline{PM} = \overline{PH} \Longrightarrow \frac{\overline{PM}}{\overline{PH}} = 1$$