PROVA DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

GEOMETRIA

1ª. QUESTÃO

ENUNCIADO:

1.1 - Um cone circular reto, de raio da base igual a "R" e altura "h", está circunscrito a uma esfera de raio "r".

Provar que

$$\frac{2}{r\,h} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}$$

SOLUÇÃO:

área total do cone $\quad S = \pi R\,(g + R)$

volume do cone $\quad V = 1/3\, \pi R^2 h$

área da esfera $\quad S = 4 \pi r^2$

volume da esfera $\quad V = 4/3\, \pi r^3$

Como a relação entre as áreas é igual a relação entre os volumes; podemos escrever

$$\frac{\pi R(g + R)}{4 \pi r^2} = \frac{1/3\, \pi R^2 h}{4/3\, \pi r^3} \qquad \text{simplificando}$$

$$\frac{g + R}{R} = \frac{h}{r} \qquad\qquad \frac{g}{R} = \frac{h - r}{r}$$

Elevando ao quadrado

$$\frac{g^2}{R^2} = \frac{h^2 - 2rh + r^2}{r^2}$$

$$g^2 r^2 = R^2 h^2 - 2rR^2 h + R^2 r^2$$

$$g^2 = h^2 + R^2$$

$$h^2r^2 + R^2r^2 = R^2h^2 - 2rR^2h + R^2r^2$$

$$h^2r^2 = R^2h^2 - 2rR^2h$$

$$2rR^2h = R^2h^2 - h^2r^2$$

Dividindo por $r^2R^2h^2$ e simplificando temos

$$\frac{2}{rh} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}$$

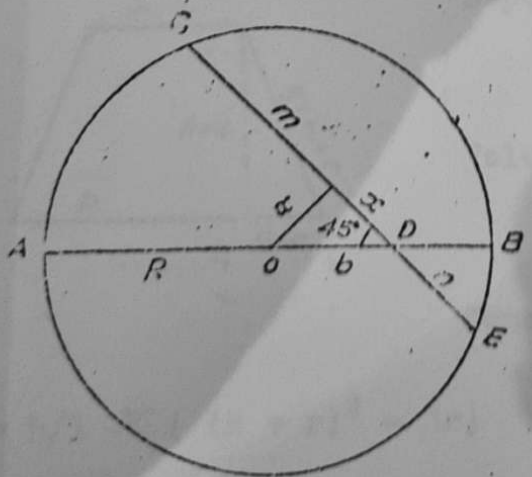
RESPOSTA: $2/rh = 1/r^2 - 1/R^2$

1a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

1.2 – Uma corda corta o diâmetro de um círculo segundo um ângulo de 45° . Demonstrar que a soma dos quadrados dos segmentos aditivos "m" e "n", em que a corda fica dividida, é igual ao dôbro do quadrado do raio do círculo.

SOLUÇÃO:



$m = CD$ $\qquad n = DE$

Provar que $m^2 + n^2 = 2R^2$

como $m.n = (R + b)(R - b)$

$$m - x = n + x$$

$$b^2 = 2x^2$$

$$m.n = R^2 - b^2$$

$$m.n = R^2 - 2x^2$$

$$m - x = n + x$$

$$2x = m - n \quad \therefore \quad x = \frac{m-n}{2}$$

$$m.n = R^2 - 2 \cdot \frac{(m-n)^2}{2^2}$$

$$2mn = 2R^2 - m^2 + 2mn - n^2$$

$$\therefore \quad m^2 + n^2 = 2R^2$$

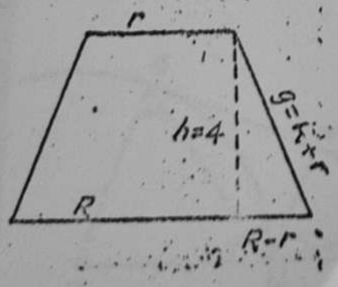
RESPOSTA: $m^2 + n^2 = 2R^2$

1a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

1.3 - Um tronco de cone de revolução, de bases paralelas, tem a sua geratriz igual à soma dos raios das suas bases. Sabendo-se que a sua área lateral é igual a 66,56 cm^2, e que a sua altura é de 4 cm, calcular o seu volume. Considerar $\pi = 3{,}14$.

SOLUÇÃO:



Superfície lateral do tronco do cone

$$S_\ell = \pi g(R + r)$$

Volume do tronco de cone

$$V = \pi\, h/3\, (R^2 + r^2 + Rr)$$

Como $g = R+r$ $\quad S_\ell = \pi(R + r)^2 = 66{,}56$

$$\therefore V = h/3\, \pi\, ((R + r)^2 - Rr) \qquad \text{como } h = 4$$

$$V = 4/3\, (66{,}56 - \pi Rr)$$

como $g^2 = h^2 + (R - r)^2$ $\qquad g = R + r$

$h = 4$

$16 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$

$Rr = 4$

$\therefore V = 4/3\,(66{,}56 - 4\pi) = 4/3\,(66{,}56 - 12{,}56) = 4/3 \times 54$

$V = 4 \times 18$ $\qquad V = 72\ cm^3$

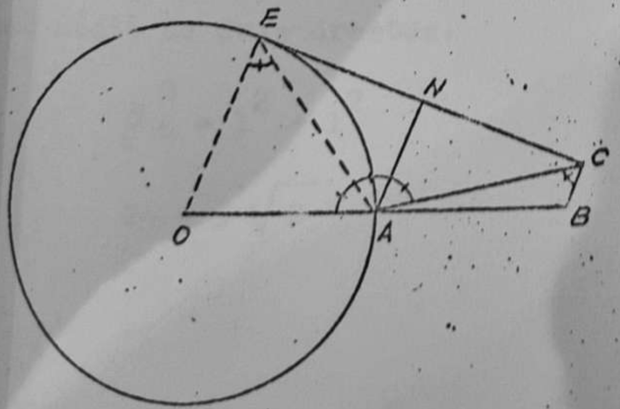
RESPOSTA: $V = 72\ cm^3$

2a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

2.1 - Prolonga-se o raio OA de um círculo, de um comprimento AB = OA ; traça-se uma tangente ao círculo, sôbre a qual se levantam as perpendiculares AN e BC. Supondo que o ângulo $O\hat{A}C = 126^\circ$, qual o valor do ângulo $A\hat{C}B$?

SOLUÇÃO:



$O\hat{A}C = 126^\circ \qquad A\hat{C}B = ?$

Como $EN = NC$

AN é altura do triângulo, bissetriz e mediana. Logo o triângulo EAC é isósceles.

Logo $E\hat{A}N = N\hat{A}C$

$N\hat{A}C = A\hat{C}B$ como alternos internos

$N\hat{A}E = O\hat{E}A$ como alternos internos

$O\hat{E}A = E\hat{A}O$ em virtude do triângulo AEO ser isósceles

Logo $A\hat{C}B = 1/3\ O\hat{A}C$

RESPOSTA: $A\hat{C}B = 42°$

2a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

2.2 - Um cubo, de área total igual a 24 m^2, é cortado por um plano de modo a se obter uma seção hexagonal regular. Calcular o lado do quadrado inscrito no triângulo equilátero de perímetro igual ao do hexágono obtido. Considerar

$$\sqrt{2} = 1,41$$
$$\sqrt{3} = 1,73$$

SOLUÇÃO:

Sabemos que $6a^2 = 24 \therefore a^2 = 4 \therefore a = 2$

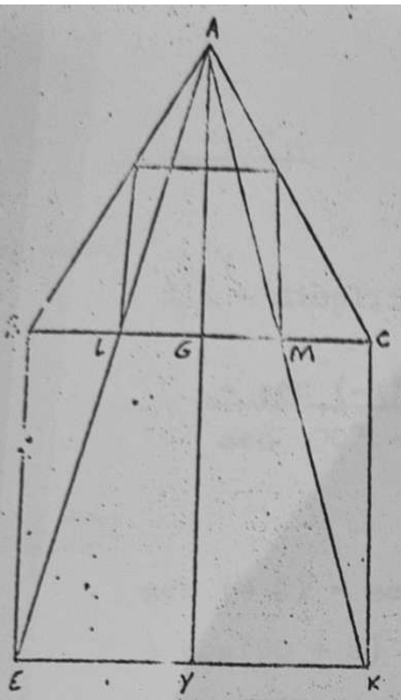
Como a seção é hexagonal o lado do hexágono é formado unindo o ponto médio de duas arestas.

$$\ell_6^2 = 1^2 + 1^2 \qquad \ell_6 = \sqrt{2}$$

$$2p = 6\sqrt{2} \qquad \ell_3 = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{LM}{EK} = \frac{AG}{AY}$$

$$LM = \ell_4 \qquad EK = \ell_3 = 2\sqrt{2}$$



$$\overline{AG}^2 = (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 = 8 - 2 = 6$$

$$AG = \sqrt{6} \qquad AY = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

$$\frac{\ell_4}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

$$\ell_4 = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

Efetuando $\ell_4 = 1{,}312$ cm

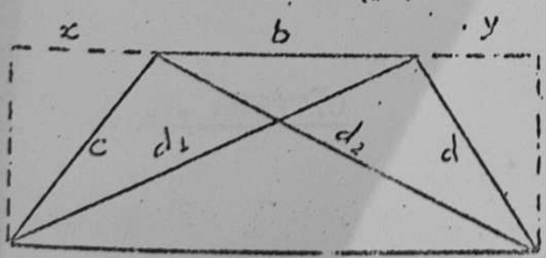
RESPOSTA: $\ell_4 = 1{,}312$ cm

2a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

2.3 – Provar que, em qualquer trapézio, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos lados não paralelos mais o dôbro do produto das bases.

SOLUÇÃO:



$$d_1^2 = b^2 + c^2 + 2bx$$

$$d_2^2 = b^2 + d^2 + 2by$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2b^2 + c^2 + d^2 + 2b(x + y)$$

Como $x + y = a - b$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2b^2 + c^2 + d^2 + 2b(a - b)$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2b^2$$

RESPOSTA: $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$

TRIGONOMETRIA

1. QUESTÃO

ENUNCIADO:

1.1 - Simplifique a expressão:

$$\frac{-\operatorname{sen}(-a) + 3\cos(90^\circ + a) + 2\operatorname{sen}(180^\circ + a)}{\operatorname{sen}(90^\circ + a) + \cos(180^\circ - a) + \operatorname{sen}(90^\circ - a)}$$

SOLUÇÃO:

$\operatorname{sen}(-a) = \operatorname{sen} a$

$3\cos(90 + a) = -3\operatorname{sen} a$

$2\operatorname{sen}(180 + a) = -2\operatorname{sen} a$

$\operatorname{sen}(90 + a) = \cos a$

$\cos(180 - a) = -\cos a$

$\operatorname{sen}(90 - a) = \cos a$

Logo temos $\dfrac{\operatorname{sen} a - 3\operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen} a}{\cos a - \cos a + \cos a} = \dfrac{4\operatorname{sen} a}{\cos a} = -4\operatorname{tg}$

RESPOSTA: $-4\operatorname{tg} a$

1a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

1.2 - Verifique a exatidão da expressão abaixo:

$$\operatorname{tg} 3a \cdot \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a \cdot \operatorname{tg}^2 a}$$

SOLUÇÃO:

$$\operatorname{tg} 3a\ \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a\ \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\text{tg } 3a \text{ tg } a = \frac{(\text{tg } 2a + \text{tg } a)\,(\text{tg } 2a - \text{tg } a)}{(1 - \text{tg } 2a \text{ tg } a)(1 + \text{tg } 2a \text{ tg } a)}$$

Porém $\dfrac{\text{tg } 2a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } 2a \text{ tg } a} = \text{tg } (2a + a) = \text{tg } 3a$

$$\frac{\text{tg } 2a - \text{tg } a}{1 + \text{tg } 2a \text{ tg } a} = \text{tg } (2a - a) = \text{tg } a$$

Logo

$$\text{tg } 3a \text{ tg } a = \text{tg } 3a \text{ tg } a$$

RESPOSTA: $\text{tg } 3a \text{ tg } a = \text{tg } 3a \text{ tg}$

2a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

2.1 – Os números que medem os três ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética. Calcule êsses ângulos, sabendo que a soma dos seus senos é

$$\frac{\sqrt{2}\,(3 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{3}}{4}$$

Sabe-se que

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1)}{4}$$

SOLUÇÃO:

Sejam os ângulos: $B - x$; B e $B + x$.

Logo: $(B - x) + B + (B + x) = 180^\circ$

$\Leftrightarrow B = 60^\circ$.

Então

$$\text{sen } (60 - x) + \text{sen } (60 + x) = \frac{\sqrt{2}\,(3 + \sqrt{3})}{4}$$

Logo

$$2 \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}\,(3+\sqrt{3})}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4} \Longleftrightarrow x = 15^\circ .$$

RESPOSTA: 45° ; 60° e 75°

2a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

2.2 - Resolva o sitema das equações:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}/3 \\ \cot x + \cot y = -2\sqrt{3}/3 \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}/3 & \ldots (1) \\ \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = -2\sqrt{3}/3 & \ldots (2) \end{cases}$$

$$\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{2\sqrt{3}}{3(\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)}$$

Por substituição

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}/3 \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = -1 . \end{cases}$$

Resolvendo o sistema: $z^2 - 2\sqrt{3}/3\, z - 1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{3} \\ z = -\sqrt{3}/3 \end{cases}$

Logo

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} y = -\sqrt{3}/3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}/3 \\ \operatorname{tg} y = \sqrt{3} \end{cases}$$

RESPOSTA:

$$\begin{cases} x = K\pi + \pi/3 \\ y = K\pi + \pi/6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = K\pi + \pi/6 \\ y = K\pi + \pi/3 \end{cases} ; \; k = 0, \pm 1, \pm 2 \; .$$

3a. QUESTÃO

ENUNCIADO:

Que valores devem ser dados a "m", na equação abaixo, para que os valores de "x" sejam os dos ângulos agudos de um triângulo retângulo ?

$$3 \operatorname{tg} x + m^2 \cot x = 4m$$

Quais são os ângulos ?

SOLUÇÃO:

$$3 \operatorname{tg} x + m^2 \operatorname{cotg} x = 4m$$

$$3 . \operatorname{tg}^2 x - 4m . \operatorname{tg} x + m^2 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\left. \begin{matrix} x_1 > 0 \;\; e \;\; x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 = \pi/2 \end{matrix} \right| \Longrightarrow \begin{cases} 4m/3 > 0 \\ m^2/3 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \left. \begin{cases} m > 0 \\ m = \pm 3 \end{cases} \right| \Rightarrow m = \sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

De (1) e (2) : $\begin{cases} \operatorname{tg} x_1 = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x_2 = \sqrt{3}/3 \end{cases}$

RESPOSTA: 30° e 60°