

GEOGRAFIA

**01** Por que os Estados europeus estão tentando proceder à sua unificação econômica?

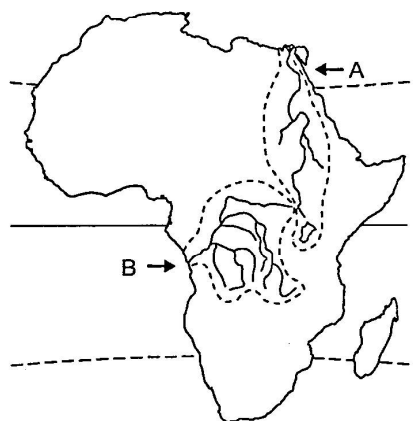
**Resolução**

A unificação econômica dos Estados europeus é fruto da reorganização do continente no pós-guerra. O sucesso do BENELUX (União Econômica da Bélgica, Holanda e Luxemburgo) propiciou a idéia de se criar uma organização econômica mais ampla, surgindo daí, com o Tratado de Roma em 1957, o MCE (Mercado Comum Europeu), hoje com doze países-membros.

A unificação econômica em curso tem como objetivos fundamentais a livre circulação de mercadorias, capitais e mão-de-obra entre os doze países-membros, visando o fortalecimento econômico dos mesmos para enfrentar a concorrência internacional de gigantes comerciais como os Estados Unidos e o Japão. Outro objetivo fundamental da unificação é a diminuição do nacionalismo e das rivalidades que nasceram com a competição econômica entre eles, o que levou às duas grandes guerras mundiais.

Com o fim da Guerra Fria, os países da AELC, bem como outros países europeus, como Polônia, Hungria, Rep. Tcheca, Eslováquia, etc., também estão pleiteando o ingresso na Comunidade Econômica Européia.

**02**



Identifique e compare as bacias hidrográficas A e B quanto ao regime fluvial e utilização dos recursos hídricos.

**Resolução**

As bacias hidrográficas identificadas com as letras A e B são, respectivamente, as bacias do Rio Nilo e do Rio Congo.

O Nilo nasce em uma região de clima tropical úmido na África Oriental e apresenta, portanto, regime pluvial tropical. Historicamente suas cheias anuais garantiram às regiões por ele atravessadas (principalmente no baixo curso — áreas desérticas do Egito) a renovação da fertilidade de suas margens, permitindo a prática da agricultura. Hoje, com a construção de grandes represas para a produção de hidroeletricidade como Assuan e Assiut, as cheias foram controladas e o processo de irrigação artificial passou a ser utilizado na região. O Nilo é bastante utilizado também para a navegação, principalmente no seu baixo curso.

O Congo, por ter sua bacia numa região de clima equatorial, quente e úmido o ano todo, tem regime pluvial equatorial com grande volume d'água (segundo rio mais volumoso do globo) e duas cheias anuais. A utilização de sua bacia atém-se principalmente à navegação, pois é uma região de pequena concentração demográfica e economia primária extrativista.

**03** Estabeleça comparações entre a agricultura itinerante e a agricultura de jardinagem do ponto de vista das técnicas agrícolas e da mão de obra.

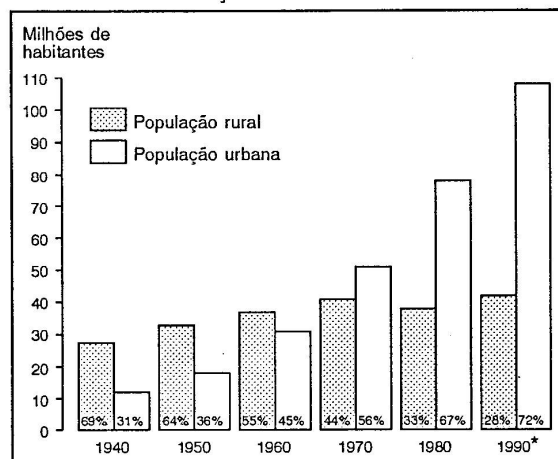
**Resolução**

A agricultura itinerante, também denominada “roça” ou agricultura itinerante sobre cinzas (agricultura extensiva), é praticada principalmente nas regiões intertropicais, com técnicas arcaicas (como a queimada) e mão-de-obra com pouca ou praticamente nenhuma disponibilidade técnica; a produção visa sobretudo a própria subsistência do agricultor e sua família. O desgaste do solo, devido às técnicas precárias, exige a constante mudança para novas áreas de cultivo e o conseqüente abandono das áreas mais antigas.

A agricultura de jardinagem, por sua vez, é intensiva; utiliza técnicas também tradicionais, com intenso uso de mão-de-obra; é praticada principalmente nas planícies aluviais do sudeste e da parte oriental da Ásia. A produtividade por área é bastante elevada, conseguindo-se até três colheitas anuais (principalmente na rizicultura) e visa também a subsistência, pois é praticada basicamente em áreas com grandes pressões demográficas.

**04**

POPULAÇÃO RURAL E URBANA



Fonte: Anuário estatístico do Brasil, 1985. \* Estimativa.

Fundamentando-se nos dados do gráfico acima, discorra sobre as transformações ocorridas com os setores agrário e industrial brasileiro no período considerado.

**Resolução**

Até a década de 40 o Brasil caracterizava-se por ser um país eminentemente rural e de economia agrária.

Após a II Guerra Mundial foram lançadas as bases para a industrialização do país, que passou a se intensificar, principalmente após a década de 70, com a abertura de nossa economia ao capital transnacional. A industrialização intensificou o processo de urbanização, com a conseqüente modernização do campo e a introdução de máquinas, gerando excedente de mão-de-obra em algumas áreas do país. O êxodo rural gerado e intensificado por tal processo levou o país a apresentar índices de urbanização superiores a 70% em 1990, mas a geração de empregos no setor industrial no país não foi suficiente para absorver todo esse novo contingente populacional, agravando o problema do subemprego e do desemprego urbano.

A indústria nesse período concentrou-se espacialmente no Sudeste, em especial, nas proximidades da Grande São Paulo e o setor agrário nessa área orientou-se principalmente para a produção de matéria-prima para as indústrias ou para a exportação.

**05** Atribuir exclusivamente ao clima a responsabilidade sobre os deslizamentos catastróficos nas encostas existentes nas cidades brasileiras como as do Rio de Janeiro e São Paulo, é esconder a causa principal do problema.

A partir desta afirmação, apresente e analise os outros fatores envolvidos.

**Resolução**

Tem sido muito comum, nos últimos anos, atribuir às prolongadas e grandes quantidades de chuvas que caem sobre certas áreas do Brasil, as causas de deslizamentos de terra. Talvez essas atribuições sejam feitas para mascarar as agressões ambientais e estados de miséria social reinantes no país.

Na verdade, juntamente com o clima estão também os intensos desmatamentos ocorridos nas encostas, diminuindo a sustentação das mesmas e aumentando a infiltração de água no solo, tornando essas encostas áreas de alto risco. Na raiz deste problema está a questão da ocupação destas áreas por populações miseráveis, instalando nesses locais aglomerados de submoradias (favelas) sem o mínimo planejamento nem condições técnicas adequadas, visto que os deslizamentos de encostas em áreas urbanas ocorrem quase que exclusivamente em áreas menos valorizadas, ocupadas por populações menos favorecidas.

**06**

BRASIL - CONSUMO DE ENERGIA POR SETORES		
Setor Industrial	.....	41,5%
Transportes	.....	22,0%
Residências	.....	17,2%
Setor público	.....	10,0%
Comércio	.....	4,3%
Agricultura	.....	5,0%
TOTAL	.....	100,0%

Fonte: IBGE - Anuário estatístico do Brasil - 1986.

A partir da tabela acima discuta a importância e limitações do Proálcool na solução do problema energético brasileiro e sua contribuição para a questão da qualidade do ar urbano.

**Resolução**

Nesses últimos anos tem-se discutido muito a validade do Proálcool para o Brasil. Alguns setores defendem fielmente o álcool como energia alternativa e de enorme importância para a diminuição da dependência do petróleo importado, já que esta é uma energia genuinamente brasileira. Por outro lado há setores condenando o projeto por este não atender em grande escala o setor industrial, nosso maior consumidor, e também por ser utilizado em menor escala nos transportes, pois o álcool é usado basicamente em automóveis de passeio, não sendo indicado para caminhões e ônibus, nossos principais consumidores de energia no setor de transportes, que continuariam dependendo do petróleo.

Quanto à questão de qualidade do ar nos centros urbanos sabemos que, associados às indústrias, estão os automóveis como grandes poluidores atmosféricos. Assim sendo, a partir do momento que se pôde substituir ou mesmo adicionar o álcool à gasolina para o consumo, os índices de poluição atmosférica diminuíram sensivelmente, uma vez que comprovadamente este combustível libera menor quantidade de gases tóxicos.

**07** O rio Tietê, na região metropolitana de São Paulo, é um dos mais poluídos do Brasil. Caracterize a natureza desta poluição mostrando as dificuldades encontradas para a recuperação do rio.

**Resolução**

A exemplo de outros rios que cortam grandes complexos urbano-industriais, o rio Tietê recebe diariamente toneladas de poluentes químicos e orgânicos.

Com o crescimento desenfreado das cidades da região metropolitana, ocupando suas cabeceiras, não houve um acompanhamento na instalação de estações de tratamento de esgoto, além da proliferação de loteamentos clandestinos que despejam seus esgotos diretamente no rio. Aliado ao esgoto doméstico, estão também os poluentes químicos, que são descartados por um parque industrial tecnologicamente atrasado e sem a mínima

preocupação com a preservação dos recursos hídricos, que caracteriza a industrialização tardia.

As maiores dificuldades que se notam para a recuperação do rio são referentes à conscientização das empresas em instalarem filtros para o tratamento de seus esgotos devido aos altos custos, à necessidade de grandes investimentos por parte do Estado na instalação de estações de tratamento de esgotos domésticos e, fundamentalmente, à conscientização da população para adoção de uma postura preservacionista.

**08** Relacione a predominância da população de origem européia na Região Sul do Brasil com o processo de povoamento do território brasileiro.

**Resolução**

Durante o período colonial houve ocupação dos espaços do território brasileiro que interessavam à metrópole portuguesa, através de um processo de colonização de exploração. Assim, as áreas intertropicais litorâneas passaram a ser utilizadas para o plantio de cana sob a forma de *plantation*, promovendo-se a vinda de escravos africanos para o trabalho rural, havendo portanto nessas áreas intensa miscigenação e predomínio de mestiços.

O Sul, por apresentar características climáticas mais semelhantes às da Europa (inadequadas à *plantation*), não foi inserido neste processo. Sofreu um povoamento mais tardio, promovido pelo governo brasileiro através da implantação de colônias de povoamento com a atração de imigrantes europeus (em função de conflitos com interesses dos países platinos), o que acabou por determinar o predomínio de brancos nessa área, principalmente em Santa Catarina e no Rio Grande do Sul.

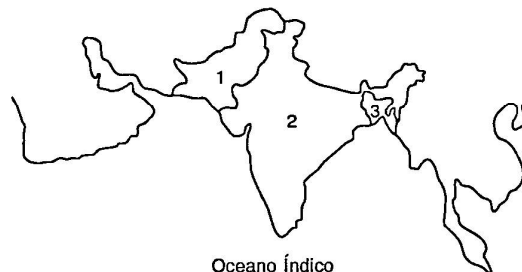
**09** Apresente algumas evidências da influência do clima no modelado do relevo brasileiro.

**Resolução**

O clima é um dos principais agentes do modelado terrestre, pois atua através dos agentes sub-aéreos ou esculturais aparando arestas, arredondando formas, rebaixando o relevo e sedimentando várzeas e depressões, num processo que tende a levar à penneplanização da superfície terrestre (processo morfoclimático).

No território brasileiro, com predomínio de climas úmidos, a influência do mesmo no modelado é bastante perceptível, como por exemplo nas formas mamelonares ou "mares de morros" presentes no Planalto Atlântico, devido à ação da água sobre estruturas cristalinas. Em outras áreas do país, como o Sertão Nordeste onde predomina clima semi-árido, a ação do clima no modelado é diferente, com a formação de chapadas sedimentares e de inselbergs (cristalinos), em virtude principalmente do intemperismo físico.

**10**



Identifique os países enumerados no mapa acima e discuta os principais conflitos existentes na área.

**Resolução**

Os três países enumerados com 1, 2 e 3 no mapa são, respectivamente, o Paquistão, a Índia e Bangladesh, que fazem parte do chamado "Mundo Indiano" na Ásia Meridional ou de Monções. A própria existência desses três países ao invés de apenas um, é consequência de conflitos religiosos tradicionais nessa área onde convivem, num mesmo território, inúmeras etnias, línguas e principalmente, religiões diferentes. A criação do Paquistão após a

independência da Índia no pós-Segunda Guerra Mundial (que incluía também o atual Bangladesh) foi consequência dessas diferenças religiosas irreconciliáveis entre muçulmanos (para os quais se criou o Paquistão), e a Índia que deveria assim concentrar os hinduístas. Tais transferências provocaram as maiores migrações forçadas do mundo moderno em ambas as direções, mas os conflitos não cessaram. Continuam até hoje e não se limitam aos bramânistas e muçulmanos: incluem também minorias sikhs e outras, num processo que tem provocado traumas sangrentos à Índia, como os assassinatos do Mahatma Gandhi e mais recentemente de Indira e de seu filho Rajiv Gandhi.

**11** Nos Estados Unidos, compare as regiões industriais do nordeste com as da costa do Pacífico do ponto de vista da estrutura das indústrias e da organização do trabalho.

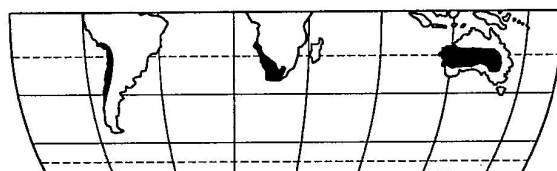
#### Resolução

As regiões industriais do nordeste dos Estados Unidos e da costa do Pacífico apresentam estruturas e organização de trabalho bem diferentes entre si, pois a implantação das mesmas data de períodos diferentes na história econômica do país.

No Nordeste, conhecido por “cinturão industrial”, a indústria foi implantada durante o processo de Revolução Industrial do século XIX e hoje encontra-se já bastante envelhecida, perdendo muito em competitividade e produtividade, pois emprega grande número de operários de média qualificação (organizados em grandes sindicatos fortemente corporativos), em unidades industriais pouco automatizadas e em ramos mais tradicionais como siderúrgico, metalúrgico, têxtil, alimentício, químico, etc.

A costa do Pacífico possui um setor industrial mais moderno e mais competitivo a nível internacional, pois é de implantação mais recente (pós Segunda Guerra Mundial), com o predomínio de ramos como a eletrometalurgia do alumínio (graças à maior disponibilidade hidroelétrica nessa área), bem como das indústrias aeronáutica, bélica e de computadores (Vale do Silício na Califórnia), com mão-de-obra mais qualificada e menos numerosa, e de fraca organização corporativa, em virtude da robotização e automação nas linhas de produção.

**12**



Caracterize o clima das áreas assinaladas no mapa acima e explique sua ocorrência.

#### Resolução

As áreas assinaladas no mapa correspondem a regiões de climas áridos e semi-áridos na América do Sul (deserto de Atacama), na África (Kalahari) e Austrália (Grande Deserto Australiano). São desertos quentes, característicos das regiões onde predominam as altas pressões subtropicais — áreas cortadas pelo Trópico de Capricórnio — onde o ar descendente dos ventos contra-alísios, extremamente secos, provoca grandes amplitudes térmicas diárias, com grande aquecimento durante o dia e esfriamento durante a noite; as amplitudes térmicas anuais, no entanto, são baixas. A pluviosidade nessas áreas é, além de muito baixa, bastante irregular.

O surgimento de desertos nessas regiões deve-se, também, à presença de correntes marítimas frias nas proximidades dos seus litorais, pois estas provocam a condensação e a precipitação da umidade no próprio oceano, bem como a presença de barreiras orográficas (como os Andes na América do Sul).

# MATEMÁTICA

**01** A distribuição dos salários de uma empresa é dada na tabela abaixo:

Salário (em Cr\$)	Nº de funcionários
500.000,00	10
1.000.000,00	5
1.500.000,00	1
2.000.000,00	10
5.000.000,00	4
10.500.000,00	1
<b>Total</b>	<b>31</b>

- a) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa?  
 b) Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salários de Cr\$ 2.000.000,00 cada. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior que a anterior?

**Resolução**

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_{31}$ , os salários dos funcionários na ordem em que aparecem na tabela.

a) Média:  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{31}}{31} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{10 \cdot 500.000 + 5 \cdot 1.000.000 + \dots + 1 \times 10.500.000}{31} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 2.000.000$$

Mediana:  $m$

Como o número de termos é ímpar, existe apenas um termo central, o 16º termo. Assim:

$$m = x_{16} \Rightarrow m = 1.500.000$$

b) Variância "anterior":  $v_1$

$$v_1 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_{31})^2}{31}$$

"Nova" variância:  $v_2$

Como os novos salários são iguais à média, a mesma não se altera, assim:

$$v_2 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_1)^2 + \dots + (\bar{x} - x_{31})^2 + (\bar{x} - x_{32})^2 + (\bar{x} - x_{33})^2}{33}$$

Sendo  $x_{32}$  e  $x_{33}$  os salários dos dois novos funcionários, temos que:

$$\bar{x} = x_{32} = x_{33}, \text{ isto é, } \bar{x} - x_{32} = 0 \text{ e } \bar{x} - x_{33} = 0.$$

Assim:

$$v_2 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_{31})^2}{33}$$

Fazendo  $(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_{31})^2 = k$ , podemos escrever:

$$v_1 = \frac{k}{31} \text{ e } v_2 = \frac{k}{33}, \text{ assim, } v_2 < v_1$$

Respostas: a) A média é Cr\$ 2.000.000,00 e a mediana, Cr\$ 1.500.000,00; b) A variância da nova distribuição ficará menor.

**02** Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{cases}$$

**Resolução**

Fazendo  $\frac{1}{u} = a$  e  $\frac{1}{v} = b$ , no sistema em questão, temos que:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 2$$

Para  $a = 1$ :  $\frac{1}{u} = 1 \Leftrightarrow u = 1$

Para  $b = 2$ :  $\frac{1}{v} = 2 \Leftrightarrow v = \frac{1}{2}$

Resposta:  $u = 1$  e  $v = \frac{1}{2}$

**03** Uma empresa vende uma mercadoria e vai receber o pagamento em duas prestações. A primeira no ato da venda e a segunda trinta dias após. Supondo que o preço à vista da mercadoria seja  $C$  cruzeiros, que o primeiro pagamento seja de  $\frac{C}{3}$  cruzeiros e que a inflação nesses 30 dias seja de 25%, calcule o valor que deve ser cobrado no segundo pagamento de modo a compensar exatamente a inflação do período.

**Resolução**

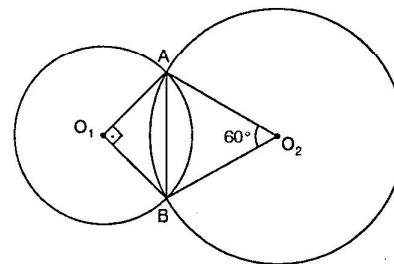
- Preço à vista:  $C$
- Primeiro pagamento:  $\frac{C}{3}$
- Dívida a ser paga após 30 dias:  $C - \frac{C}{3} = \frac{2C}{3}$

Corrigindo a dívida a ser paga em 25% teremos:

$$1,25 \cdot \frac{2C}{3} = \frac{125}{100} \cdot \frac{2C}{3} = \frac{5C}{6}$$

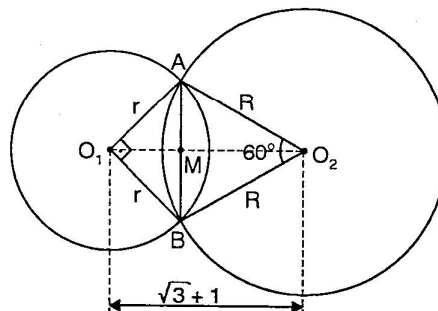
Resposta: O valor a ser cobrado deve ser igual a  $\frac{5}{6}C$ .

**04**



A corda comum de dois círculos que se interceptam é vista de seus centros sob ângulos de  $90^\circ$  e  $60^\circ$ , respectivamente. Sabendo-se que a distância entre seu centro é igual a  $\sqrt{3} + 1$ , determine os raios dos círculos.

**Resolução**



O triângulo  $ABO_2$  é equilátero, assim  $O_2M = \frac{R\sqrt{3}}{2}$  e  $AB = R$

O triângulo  $ABO_1$  é retângulo e isósceles, assim:

$$O_1M = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}$$

Pelo enunciado:

$$O_1M + MO_2 = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{2}(1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow R = 2$$

No triângulo  $ABO_1$ :  $AB^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow R^2 = 2r^2$

Como  $R = 2$  e  $r > 0$ , temos que  $r = \sqrt{2}$ .

Resposta: O raio  $r$  do círculo de centro  $O_1$  mede  $\sqrt{2}$  e o raio  $R$  do círculo de centro  $O_2$  mede 2.

## 05 Considere as equações

I	$\log(x+y) = \log x + \log y$
II	$x+y = xy$

- a) As equações I e II têm as mesmas soluções? Justifique.  
 b) Esboce o gráfico da curva formada pelas soluções de I.

### Resolução

- a) Em I, pelas condições de existência devemos ter  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Em II é trivial que  $(x, y) = (0, 0)$  é solução.

Assim, I e II não têm as mesmas soluções.

- b) Sendo  $x > 0$  e  $y > 0$  temos:

$$\log(x+y) = \log x + \log y$$

ou seja,  $x+y = xy$

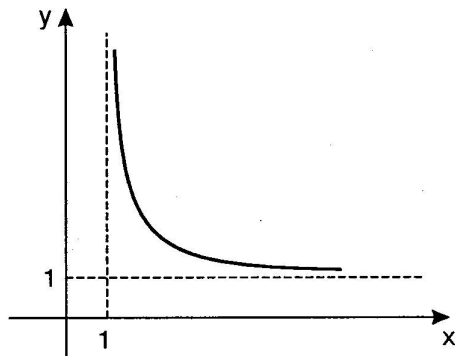
$$\text{Assim, } y = \frac{x}{x-1} \text{ para } x \neq 1$$

Nestas condições:

$$y = \frac{(x-1)+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{ou seja, } y-1 = \frac{1}{x-1} \text{ para } x \neq 1$$

que corresponde ao gráfico de  $y = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) transladado uma unidade para cima e 1 unidade para direita. Excluindo os pontos em que  $x \leq 0$  ou  $y \leq 0$ , temos:



O caso em que  $x = 1$  é imediato, isto é, a equação I não tem solução.

## 06 Seja A o conjunto dos 1993 primeiros números inteiros estritamente positivos.

- a) Quantos múltiplos inteiros de 15 pertencem ao conjunto A?  
 b) Quantos números de A não são múltiplos inteiros nem de 3 nem de 5?

### Resolução

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 1993\}$$

Seja  $d(n)$  o número de múltiplos inteiros de  $n$  pertencentes ao conjunto A.

a) 
$$\begin{array}{r|l} 1993 & 15 \\ \hline 13 & 132 \end{array} \quad d(15) \text{ é dado pelo quociente da divisão ao lado, assim } d(15) = 132$$

b) Analogamente:

$$\begin{array}{r|l} 1993 & 3 \\ \hline 1 & 664 \end{array} \quad d(3) = 664$$

$$\begin{array}{r|l} 1993 & 5 \\ \hline 3 & 398 \end{array} \quad d(5) = 398$$

Os múltiplos comuns de 3 e 5 são os múltiplos de 15 (MMC(3,5)).

O número de múltiplos de 3 e 5 pertencentes ao conjunto A é dado por:

$$d(3 \cup 5) = d(3) + d(5) - d(15) \Rightarrow d(3 \cup 5) = 930$$

Assim, o número de múltiplos de A que não são múltiplos de 3 e 5 é:

$$1993 - 930 = 1063$$

Resposta: a) 132; b) 1063

## 07 Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado perfeito (todas as seis faces têm probabilidades iguais). Com relação a esse experimento considere os seguintes eventos:

I	O resultado do lançamento é par.
II	O resultado do lançamento é estritamente maior do que 4.
III	O resultado é múltiplo de 3.

- a) I e II são eventos independentes?  
 b) II e III são eventos independentes?  
 Justifique suas respostas.

### Resolução

Espaço amostral:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Evento I:  $E_I = \{2, 4, 6\}$
- Evento II:  $E_{II} = \{5, 6\}$
- Evento III:  $E_{III} = \{3, 6\}$

Num lançamento do dado, tem-se:

$$P(I) = \frac{n(E_I)}{n(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(II) = \frac{n(E_{II})}{n(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- a) Analisando os eventos I e II, num lançamento do dado, tem-se:

$$P(I/II) = \frac{n(E_I \cap E_{II})}{n(E_{II})} = \frac{1}{2}$$

Como  $P(I/II) = P(I)$  tem-se que os eventos I e II são independentes.

- b) Analisando os eventos II e III, num lançamento do dado, tem-se:

$$P(II/III) = \frac{n(E_{II} \cap E_{III})}{n(E_{III})} = \frac{1}{2}$$

Como  $P(II/III) \neq P(II)$  tem-se que os eventos II e III não são independentes.

Resposta: a) sim; b) não.

**08** Determine as equações das retas do plano que passam pela origem do sistema de coordenadas e que não interceptam a curva do plano dada pela equação  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Resolução**

**1ª solução**

Feixe de retas que passam pela origem:

$$\begin{cases} x = 0 & (1) \\ y = mx & (2) \end{cases}$$

A reta (1) não intercepta a curva dada, pois substituindo  $x = 0$  em  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  temos:

$$-\frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y \notin \mathbb{R}$$

Fazendo a intersecção da reta (2) com a curva dada temos:

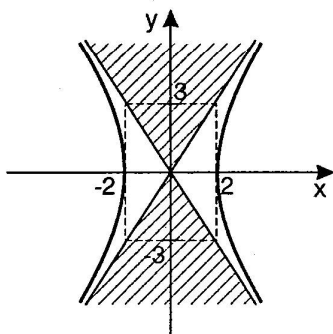
$$\frac{x^2}{4} - \frac{m^2 x^2}{9} = 1 \Rightarrow (9 - 4m^2)x^2 - 36 = 0$$

$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{36}{9 - 4m^2}}$ , que não tem solução se  $9 - 4m^2 \leq 0$ , isto é, se  $m \leq -\frac{3}{2}$  ou  $m \geq \frac{3}{2}$ .

Resposta:  $\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = mx, m \in \mathbb{R} \mid m \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } m \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

**2ª solução**

A curva dada é uma hipérbole de centro (0,0), eixo real sobre o eixo x, e assíntotas  $y = \frac{3}{2}x$  e  $y = -\frac{3}{2}x$ .

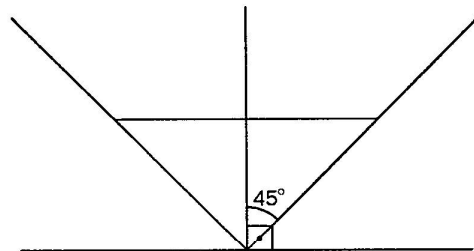


Para que a reta não tenha ponto em comum com a curva ela deve estar inteiramente contida na região hachurada (inclusive assíntotas), assim:

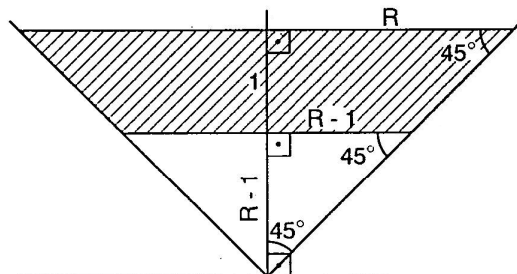
$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = mx, m \in \mathbb{R} \mid m \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } m \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

**09** Uma caixa d'água tem a forma de um cone circular reto como ilustrado na figura. 7329 litros de água foram retirados da caixa ocasionando um abaixamento de um metro no nível da água. Quantos litros de água existiam inicialmente na caixa?

Para os cálculos use  $\pi = 3,141$



**Resolução**



Se  $R$  o raio da base da caixa, temos:

$$V_{\text{retirado}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot R}{3} - \frac{\pi \cdot (R-1)^2 \cdot (R-1)}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7,329 = \frac{\pi R^3}{3} - \frac{\pi (R-1)^3}{3}$$

para  $\pi = 3,141$ :

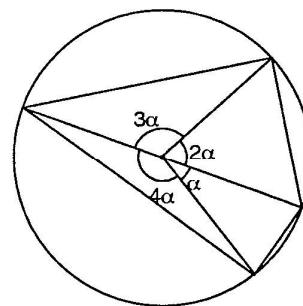
$$7 = R^3 - (R-1)^3 \Rightarrow R^2 - R - 2 = 0 \Rightarrow R = 2 \text{ ou } R = -1 \text{ (não convém)}$$

Assim,  $R = 2$  m

$$V_{\text{caixa}} = \frac{\pi \cdot R^3}{3} = \frac{\pi \cdot 2^3}{3} = 8,376 \text{ m}^3$$

Resposta: Existiam inicialmente na caixa 8376 litros de água.

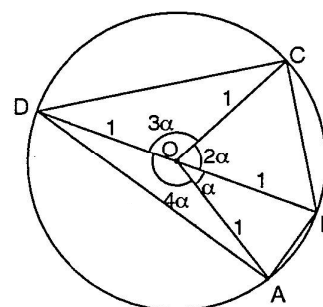
**10**



- a) Calcule a área do quadrilátero inscrito numa circunferência de raio unitário, como indicado na figura.
- b) Expresse essa área em função de  $m = \cos 18^\circ$

**Resolução**

- a) Considerando  $O$  o centro de circunferência, temos:



a área  $S$  do quadrilátero será

$$S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}$$

$$S = \frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}\alpha}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}2\alpha}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}3\alpha}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}4\alpha}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}(\text{sen}\alpha + \text{sen}2\alpha + \text{sen}3\alpha + \text{sen}4\alpha)$$

Como  $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360^\circ$  temos que  $\alpha = 36^\circ$

$$\therefore S = \frac{1}{2}(\text{sen}36^\circ + \text{sen}72^\circ + \text{sen}108^\circ + \text{sen}144^\circ)$$

mas  $\text{sen}108^\circ = \text{sen}72^\circ$  e  $\text{sen}144^\circ = \text{sen}36^\circ$

$$\therefore S = \frac{1}{2}(2\text{sen}36^\circ + 2\text{sen}72^\circ)$$

$$S = \text{sen}36^\circ + \text{sen}72^\circ$$

b)  $\text{sen}72^\circ = \cos18^\circ$

$$\text{sen}36^\circ = 2\text{sen}18^\circ\cos18^\circ$$

$$\therefore S = 2\text{sen}18^\circ\cos18^\circ + \cos18^\circ$$

$$S = \cos18^\circ(2\text{sen}18^\circ + 1)$$

$$\text{mas } \text{sen}18^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 18^\circ}$$

$$\text{logo, } S = \cos18^\circ(2\sqrt{1 - \cos^2 18^\circ} + 1) \text{ e}$$

fazendo  $\cos18^\circ = m$  temos

$$S = m(2\sqrt{1 - m^2} + 1)$$

Outro modo de apresentar a solução 3:

$$S = \text{sen}36^\circ + \text{sen}72^\circ = 2\text{sen}54^\circ\cos18^\circ = 2\cos36^\circ\cos18^\circ \text{ e}$$

como  $\cos36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1$  temos

$$S = 2(2\cos^2 18^\circ - 1) \cdot \cos18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 2\cos18^\circ \text{ e}$$

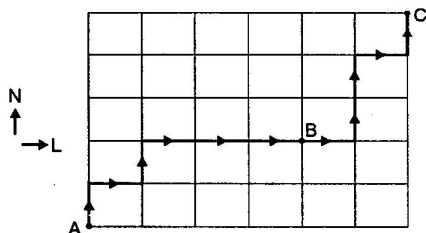
fazendo  $\cos18^\circ = m$  temos:

$$S = 4m^3 - 2m$$

Resposta: a)  $S = \text{sen}36^\circ + \text{sen}72^\circ$ ;

b)  $S = m(2\sqrt{1 - m^2} + 1)$  ou ainda  $S = 4m^3 - 2m$ .

**11** A figura abaixo representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João (A), de Maria (B), a escola (C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar  escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria?



### Resolução

Nas condições especificadas, para João ir de A at3 B, ele deve caminhar 2 quarteirões para o norte e 4 quarteirões para o leste. Assim, o número de formas que João pode ir de A at3 B, ( $n_{AB}$ ), 3 dado pelo número de permutações de NNLLLL, isto 3:

$$n_{AB} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

Analogamente, o número de formas que João pode ir de B at3 C ( $n_{BC}$ ) 3 dado pelo número de permutações de NNNLL, isto 3:

$$n_{BC} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Assim, o número de formas que João pode ir de A at3 C passando por B 3 dado por:

$$n_{AB} \cdot n_{BC} = 15 \cdot 10 = 150$$

Resposta: Há 150 formas.

**12** Sabendo-se que  $p(x)$  3 um polinmio,  $a$  3 uma constante real e  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{a\cos x}{2 + x^2}$  3 uma identidade em  $x$ , deter-

mine

a) o valor da constante  $a$ . Justifique.

b) as raízes da equação  $p(x) = 0$ .

### Resolução

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{a\cos x}{2 + x^2}$$

a) Como, em  $p(x)$ , o termo  $\frac{a\cos x}{2 + x^2}$  deve ser independente de  $x$ , então  $a$  deve ser nulo.

Observe que se a constante  $a$  não for nula,  $f(x)$  não será um polinmio nulo pois  $f(0) = \frac{a}{2}$ .

b) Sendo  $a = 0$  tem-se,  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ . Assim:

$$p(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

Logo, as raízes da equação  $p(x) = 0$  são 0, 1 e 2.

Resposta: a)  $a = 0$ ; b) 0, 1 e 2.

## Cortesia: Resoluções MED Vestibulares

Geografia: Antnio Cavenaghi e Caros Alberto Regalo

Matemática: Arnaldo William Pinto e Francisco C. de Souza