

FUVEST 1991 – Segunda fase – Geografia e Matemática (09/01/1991)

GEOGRAFIA

**01** Descreva a trajetória aproximada da corrente marítima de Humboldt e as suas conseqüências para o clima e a economia do continente que ela tangencia.

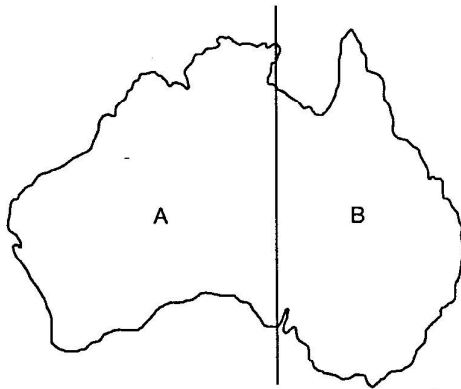
**Resolução**

A corrente de Humboldt é uma corrente marítima fria que tem sua origem nas águas oceânicas da região Antártica e se dirige para o norte, aproximando-se da costa ocidental da América do Sul no Oceano Pacífico.

Em seu trajeto ela provoca o resfriamento da massa de ar Tropical Pacífica, quente e úmida, que se dirige para os litorais norte do Chile e centro-sul do Peru, fazendo com que haja condensação e precipitação dessa umidade no próprio oceano.

Chega assim, a estas regiões quente e seca, provocando o surgimento do deserto de Atacama, no Chile, e de Sechura, no Peru. Se, por um lado, a corrente tem efeito danoso sobre o clima dessa região, por outro lado, permite a abundância de plâncton nas águas costeiras desses países, permitindo-lhes grande piscosidade, e, conseqüentemente, uma indústria pesqueira bastante ativa.

**02** Compare as áreas A e B nos aspectos físico e humano.



**Resolução**

A área A do continente australiano possui predomínio de planícies alternando-se com planaltos. Na porção ocidental do país, a vegetação predominante é de savanas e estepes, com predomínio de climas áridos e semi-áridos. Em relação à população, as poucas áreas em condições habitáveis são os litorais, em destaque o sudoeste, onde estão localizadas as cidades de Perth e Albany.

A área B possui a Cordilheira Australiana que torna-se o principal elemento do relevo e se alonga por quase 3.000 km, de norte a sul associando-se a planaltos e planícies litorâneas. A vegetação é formada por florestas, no nordeste a Tropical e no sudeste a Temperada, além dos eucaliptos na parte ocidental da Cordilheira Australiana. O clima alterna-se do tropical ao temperado, com bons índices pluviométricos. A maior parte da população se concentra na porção oriental (B, no mapa), em especial no Sudeste onde as condições ambientais são mais propícias às atividades humanas e econômicas (Estados de Vitória e Nova Gales do Sul).

**03**

- a) O que se destaca na mudança do comércio mundial evidenciada na tabela abaixo?
- b) Quais os principais produtos responsáveis por essa mudança?

**Ranking do Comércio mundial**

*Os maiores exportadores de mercadorias*

Países	Colocação 1979/1989
Estados Unidos	1/1
Alemanha Ocidental	2/2
Japão	3/3
França	4/4
Grã-Bretanha	5/5
Itália	6/6
Canadá	10/7
União Soviética	7/8
Holanda	8/9
Bélgica-Luxemburgo	11/10
Hong Kong	27/11
Taiwan	22/12
Coréia do Sul	29/13
China	34/14
Suécia	12/15
Suíça	13/16
Cingapura	32/17
Espanha	19/18
Austrália	17/19
México	37/20
Brasil	26/21

Fonte: Gatt

JORNAL DA TARDE Quarta-feira, 28-11-90

**Resolução**

a) A tabela mostra que as economias mundiais mais fortes e industrializadas mantiveram os primeiros postos em relação ao movimento das exportações, ou apresentaram pequenas transformações.

Ficaram evidenciados, porém, saltos sensíveis apresentados por alguns “países” subdesenvolvidos e periféricos como Hong-Kong, Taiwan, Coréia do Sul, Cingapura (Os Quatro Tigres Asiáticos), México e China (apesar da manutenção do socialismo), que ultrapassaram países tradicionalmente potentes no setor exportador.

b) Esta mudança foi gerada sobretudo pela industrialização acelerada que ocorre nesses países, pois eles passaram a sediar empresas estrangeiras que aí se instalam visando produzir manufaturados para o mercado externo (destaque para TV, computadores, gravadores, bicicletas, carros, motocicletas, rádios, brinquedos, tênis, máquinas fotográficas, etc) transformando-os em verdadeiras “plataformas de exportação” ou ZPE (Zonas de Processamento de Exportação), em virtude das condições favoráveis oferecidas por seus governos ao capital internacional.

**04** Caracterize dois dos principais problemas ambientais urbanos da área metropolitana de São Paulo.

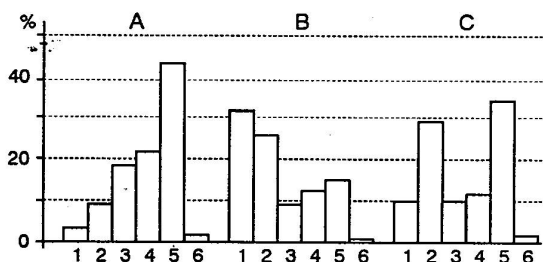
**Resolução**

Dentre os problemas ambientais podemos destacar como muito graves a situação dos rios e córregos que cortam os municípios da Grande São Paulo (em especial, o Tietê) e a poluição do ar, principalmente na zona central. O primeiro deles é gerado basicamente pela ausência de controle sobre as descargas de resíduos industriais e residenciais nos cursos d’água, pois não há tratamento de esgoto na região, não há controle sobre rede clandestina e, mesmo em grande parte da região, nem rede de esgoto existe, sendo os dejetos lançados diretamente nos rios.

A poluição do ar, por sua vez, é conseqüência do grande número de veículos que circulam pela região, a maior parte deles velhos e de tecnologia ultrapassada, altamente poluidores, agravado pelo

fato da má qualidade da gasolina nacional, somado ao fato de essa região abrigar quase a metade do parque industrial do país.

**05** Qual dos três gráficos abaixo representa a estrutura industrial do Brasil? Explique.



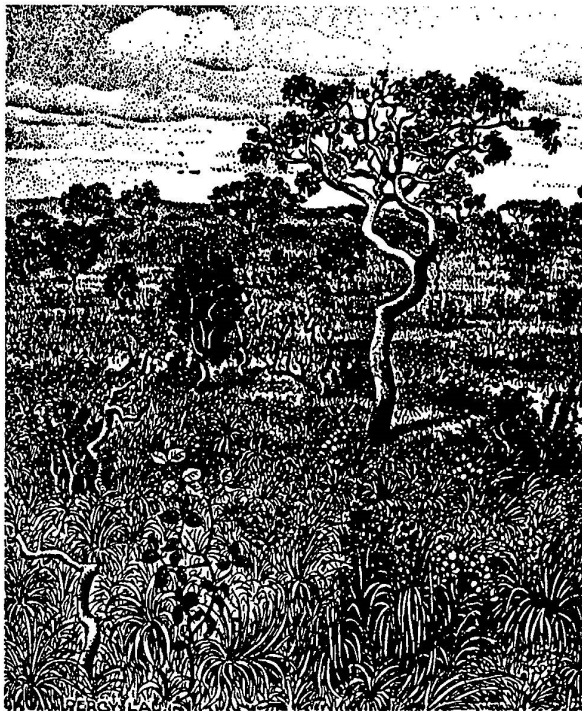
Indústrias

- 1 — metalúrgicas e mecânicas
- 2 — químicas
- 3 — papel, madeira e couro
- 4 — têxteis, vestuário e calçados
- 5 — alimentos e fumo
- 6 — diversos

**Resolução**

O gráfico que mais se aproxima da estrutura industrial do Brasil é o representado pela letra A, pois, sendo um país de industrialização tardia, apresenta uma estrutura industrial deficiente. Tal fato pode ser constatado ao se verificar o predomínio numérico de indústrias de bens de consumo que exigem menos tecnologia e menor emprego de capital, como as indústrias alimentares, têxteis, vestuário, calçados etc., enquanto que as indústrias de base ou as indústrias que exigem "know how" mais sofisticado como as mecânicas, metalúrgicas, químicas e outras aparecem com um percentual pequeno na estrutura industrial do país.

**06** A gravura de Percy Lau mostra uma formação vegetal do Brasil.



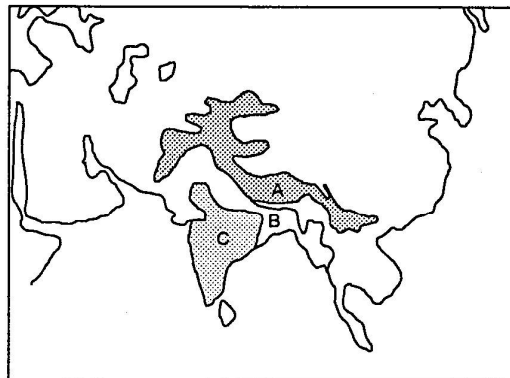
- a) Qual? Em que região ocorre?
- b) Indique duas características fisionômicas dessa vegetação.

**Resolução**

- a) A formação vegetal mostrada pela gravura de Percy Lau é o cerrado que ocorre principalmente na região Centro-Oeste do Brasil.
- b) Essa vegetação se caracteriza por apresentar dois substratos distintos: um arbóreo-arbustivo, com o predomínio de árvores ou

arbustos de porte pequeno (de 2 a 5 m) e um herbáceo, rasteiro, onde aparecem diversos tipos de capim e de gramíneas. O cerrado é formado por plantas **tropófilas** que resistem às condições adversas do clima tropical alternadamente úmido (verão) e seco (inverno), apresentando vegetais retorcidos, de raízes profundas, com casca grossa, que refletem não só o clima hostil, mas também o solo, basicamente ácido, silicoso e, às vezes, laterítico.

**07** Identifique as áreas A, B e C assinaladas no mapa. Caracterize as formas de relevo de uma delas.



**Resolução**

As áreas assinaladas com A, B e C são respectivamente a **Cordilheira do Himalaia**, o **Vale** e o **Delta do Rio Ganges** e o **Planalto do Decã**, na Índia.

O Vale e o Delta do Rio Ganges se caracteriza por ser uma planície sedimentar encaixada entre o Himalaia e o Decã, cortada no sentido Noroeste-Sudeste pelo Rio Ganges e terminando no Golfo de Bengala (Bangladesh) no maior delta fluvial do globo.

A Cordilheira do Himalaia é uma formação geológica recente, tem sua origem na Era Cenozóica (período Terciário) é portanto, uma área formada por grandes altitudes. A área ficou exposta aos agentes do intemperismo externo por um pequeno tempo geológico, sendo assim, não sofreu grandes desgastes.

O Planalto do Decã possui como característica uma formação geológica cristalina, originando os Escudos, é mais desgastado do que a Cordilheira do Himalaia por se originar no período Pré-Cambriano. A área apresenta em sua estrutura rochas metamórficas e magmáticas, além de riquezas minerais metálicas.

**08** Os Estados Unidos, Canadá e México reúnem-se para tratar da formação de um Mercado Comum norte-americano. O mesmo está acontecendo entre o Brasil e Argentina, com possibilidades de inclusão de outros países do Cone Sul. Pergunta-se:

- a) Por que está ocorrendo esse processo?
- b) Que conseqüências terá para o comércio continental e mundial?

**Resolução**

- a) O processo de formação de "mercados comuns" tem a finalidade de unir economicamente países vizinhos, com a intenção de facilitar e agilizar o comércio entre os mesmos, através da eliminação de barreiras alfandegárias, possibilitando maior integração entre os países-membros e menor dependência internacional.
- b) O surgimento dessas uniões econômicas trará, certamente, como conseqüência, uma maior intensificação do comércio inter-regional com o fortalecimento de laços entre os países vizinhos e, com isso, uma diminuição do peso desses países no comércio internacional de longo percurso, pois tendem a complementar entre os membros suas necessidades básicas, recorrendo a outros parceiros comerciais apenas para produtos que não puderem ser fornecidos pelos parceiros integrantes do mercado comum. A integração econômica regional é, também, uma forma de fortalecimento das nações, estruturando assim uma nova ordem mundial.

**09** Compare Brasil e Venezuela, do ponto de vista das reservas, consumo e exportação de petróleo.

**Resolução**

O Brasil e a Venezuela são dois países absolutamente distintos no que tange às reservas, consumo e exportação de petróleo, pois enquanto o Brasil (pelo menos segundo dados do momento) não dispõe de grandes reservas petrolíferas, a Venezuela as possui em grande quantidade, principalmente no Lago de Maracaibo e na foz do rio Orenoco. Em relação ao consumo, a situação se inverte, pois enquanto a Venezuela, apesar de grande produtora, apresenta pequeno consumo, o Brasil é um grande consumidor, devido a seu parque industrial e população maiores.

Assim, podemos constatar que o Brasil, não tendo produção suficiente para o seu consumo interno, complementa com a importação de praticamente 40% do petróleo que consome, enquanto que a Venezuela, que pertence à OPEP, é um dos maiores exportadores do mundo.

**10** Do processo de povoamento ocorrido no Rio Grande do Sul no século XIX resultou um mosaico ocupacional decorrente da presença de luso-brasileiros, imigrantes italianos e imigrantes alemães. Caracterize as condições físico-geográficas da área ocupada predominantemente por cada um desses grupos étnicos.

**Resolução**

Os luso-brasileiros representam a parcela mais antiga dos grupos étnicos que promoveram a ocupação e o povoamento do Rio Grande do Sul, instalando-se, principalmente, na região da pampa, do Vale do Jacuí e do Vale do Uruguai, regiões de topografia predominantemente plana com ondulações, clima subtropical e vegetação herbácea.

Os imigrantes italianos dirigiram-se maciçamente para a chamada Serra Gaúcha (contrafortes do Planalto Meridional), de clima subtropical e florestas de araucárias.

Os alemães se instalaram principalmente no Vale do Rio dos Sinos, região de topografia plana e clima subtropical.

**11** Analise o processo migratório do Nordeste para o Sudeste à luz das considerações do texto abaixo.

Se se admite que a migração interna é um processo social, deve-se supor que ele tenha causas estruturais que impelem determinados grupos a se pôr em movimento. Estas causas são quase sempre de fundo econômico — deslocamento de atividades no espaço, crescimento diferencial da atividade em

lugares distintos e assim por diante — e atingem os grupos que compõem a estrutura social do lugar de origem de um modo diferenciado.

Paul Singer — Economia Política da Urbanização

**Resolução**

O texto de Paul Singer mostra que os grupos humanos são impelidos a migrarem por motivos basicamente de caráter econômico. Não são outras, senão as grandes desigualdades espaciais da distribuição da riqueza pelo território nacional, as causas que impelem o nordestino a deixar a terra natal em busca de alternativas para a sobrevivência. As migrações são constantes e contínuas mas se agravam em períodos de grandes secas e as áreas que procuram são basicamente os grandes centros urbanos do Sudeste, em especial São Paulo e Rio de Janeiro que têm sido tradicionalmente, os maiores pólos de atração migratória dentro do território nacional, por sediarem uma parcela muito importante do poder econômico do País.

**12** Numa planta topográfica da cidade de São Paulo, na escala 1:8.000, qual a extensão, em centímetros, da Avenida Paulista, cuja extensão real é 2600 metros?

**Resolução**

Escala da planta topográfica da cidade de São Paulo:

$$1:8000 \text{ ou } \frac{1}{8.000}$$

Extensão real da Avenida Paulista: 2.600 metros

Extensão da Avenida Paulista em centímetros:

Resolução:

$$E = \frac{d}{D} \begin{cases} E = \text{Escala} \\ d = \text{distância no mapa} \\ D = \text{distância real} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{8.000} = \frac{x}{2.600 \text{ m}}$$

acrescentar dois zeros para transformar em centímetros

$$x = \frac{2.600 \times 100}{8.000} \Rightarrow x = \frac{260.000}{8.000} \Rightarrow x = 32,5\% \text{ cm}$$

Resposta: A av. Paulista tem uma extensão de 32,5 cm na planta.



**MATEMÁTICA**

**01**

a) Qual a metade de  $2^{22}$ ?

b) Calcule  $8^{2/3} + 9^{0,5}$

**Resolução**

a)  $\frac{2^{22}}{2} = 2^{22-1} = 2^{21}$

b)  $8^{2/3} + 9^{0,5} = (2^3)^{2/3} + (3^2)^{1/2} = 2^2 + 3 = 7$

Resposta: a)  $2^{21}$ ; b) 7

**02** Um comerciante deseja realizar uma grande liquidação anunciando  $x\%$  de desconto em todos os produtos. Para evitar prejuízo o comerciante remarca os produtos antes da liquidação.

a) De que porcentagem  $p$  devem ser aumentados os produtos para que, depois do desconto, o comerciante receba o valor inicial das mercadorias?

b) O que acontece com a porcentagem  $p$  quando o valor do desconto da liquidação se aproxima de 100%?

**Resolução**

a) Preço inicial =  $V$

$$\text{Preço após a remarcação} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot V$$

$$\text{Preço após o desconto} = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot V$$

Devemos ter:

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot V = V \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{100-x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 1 \Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = \frac{100}{100-x} \Rightarrow$$

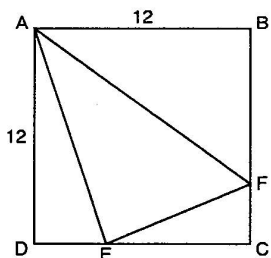
$$\Rightarrow \frac{p}{100} = \frac{x}{100-x} \Rightarrow p = \frac{100x}{100-x}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 100^-} p = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{100x}{100-x} = +\infty$

Assim,  $p$  aumenta indefinidamente.

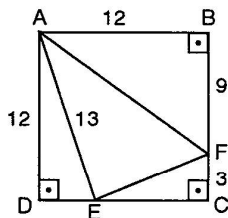
Resposta: a)  $\frac{100x}{100-x}$ ; b) aumenta indefinidamente

**03** No quadrado  $ABCD$  de lado 12 temos:  $AE = 13$  e  $CF = 3$ .



O ângulo  $\hat{A}EF$  é agudo, reto ou obtuso? Justifique.

**Resolução**



No  $\triangle ADE$ :  $13^2 = 12^2 + DE^2 \Rightarrow DE = 5$

$CE = 12 - DE \Rightarrow CE = 7$

No  $\triangle CFE$ :  $EF^2 = 3^2 + 7^2 \Rightarrow EF = \sqrt{58}$

No  $\triangle ABF$ :  $AF^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow AF = 15$

No  $\triangle AEF$ :  $AF^2 = 15^2 = 225$

$AE^2 + EF^2 = 13^2 + (\sqrt{58})^2 = 227$

Como  $AF^2 < AE^2 + EF^2$ , o ângulo  $\hat{A}EF$  é agudo.

Resposta: Agudo

**04**

$$S \begin{cases} 2y + x = b \\ 2z - y = b \\ az + x = b \end{cases}$$

Resolva o sistema  $S$  para:

a)  $a = 0$  e  $b = 1$

b)  $a = 4$  e  $b = 0$

**Resolução**

a) Fazendo  $a = 0$  e  $b = 1$ , temos:

$$\begin{cases} 2y + x = 1 & \text{(I)} \\ 2z - y = 1 & \text{(II)} \\ x = 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (III) temos que  $x = 1$ . Substituindo em (I), temos:

$2y + 1 = 1 \Rightarrow y = 0$

Substituindo em (II), temos:

$2z - 0 = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$

$S = \left\{ \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \right\}$

b) Fazendo  $a = 4$  e  $b = 0$ , temos:

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2y + x = 0 \\ 2z - y = 0 \\ 4z + x = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 0 & \times (-1) \\ -y + 2z = 0 \\ x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -y + 2z = 0 & \times (-2) \\ -2y + 4z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 0 & \text{(I)} \\ -y + 2z = 0 & \text{(II)} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Fazendo  $z = \alpha$ , temos:

Substituindo em II:  $-y + 2\alpha = 0 \Rightarrow y = 2\alpha$

Substituindo em I:  $x + 2 \cdot (2\alpha) = 0 \Rightarrow x = -4\alpha$

$S = \{(x, y, z) \mid (xyz) = (-4\alpha, 2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{C}\}$

Resposta: a)  $S = \left\{ \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \right\}$ ;

b)  $S = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) = (-4\alpha, 2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{C}\}$

**05** A intensidade  $I$  de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de  $I = 0$  até  $I = 8,9$  para o maior terremoto conhecido.  $I$  é dado pela fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \log_{10} \frac{E}{E_0}$$

onde  $E$  é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e  $E_0 = 7 \times 10^{-3}$  kwh.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

**Resolução**

a) Sendo  $I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \frac{E}{E_0}$  e  $I = 8$  temos:

$8 = \frac{2}{3} \log_{10} \frac{E}{E_0} \Rightarrow \log_{10} \frac{E}{E_0} = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{12} \Rightarrow E = E_0 \cdot 10^{12}$

Como  $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$  kwh, temos:

$E = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{12} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^9$  kwh

b) Sendo  $E'$  a energia liberada quando aumentamos a intensidade do terremoto de uma unidade, temos:

$I = \frac{2}{3} \log_{10} \frac{E}{E_0}$  (I)

$I + 1 = \frac{2}{3} \log_{10} \frac{E'}{E_0}$  (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$\frac{2}{3} \log_{10} \frac{E}{E_0} + 1 = \frac{2}{3} \log_{10} \frac{E'}{E_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_{10} \frac{E'}{E_0} - \log_{10} \frac{E}{E_0} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_{10} \frac{E'}{E_0} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_{10} \frac{E'}{E} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{E'}{E} = 10^{3/2} \Rightarrow E' = \sqrt{1000}E \Rightarrow E' = 10\sqrt{10}E$$

Assim, a energia liberada fica multiplicada por  $10\sqrt{10}$ .

Resposta: a)  $7 \cdot 10^9$  kwh; b)  $10\sqrt{10}$

**Questões 06 e 07:**

No estudo do Cálculo Diferencial e Integral, prova-se que a função  $\cos x$  (co-seno do ângulo de  $x$  radianos) satisfaz a desigualdade:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = g(x)$$

**06**

- a) Calcule o co-seno de 0,3 radianos usando  $f(x)$  como aproximação de  $\cos x$ .
- b) Prove que o erro na aproximação anterior é inferior a 0,001 e conclua que o valor calculado é exato até a segunda casa decimal.

**Resolução**

a)  $\cos 0,3 \approx f(0,3) \Rightarrow \cos 0,3 \approx \frac{0,3^2}{2} \Rightarrow \cos 0,3 \approx 0,955$

b) Sendo  $E$  o erro na aproximação anterior, temos:

$$E \leq |f(0,3) - g(0,3)| \Rightarrow E \leq \left| 1 - \frac{0,3^2}{2} - 1 + \frac{0,3^2}{2} - \frac{0,3^4}{24} \right| \Rightarrow E \leq \frac{3^4 \cdot 10^{-4}}{24} \Rightarrow E \leq 3,375 \cdot 10^{-4} \Rightarrow E \leq 0,000375$$

Como  $0,000375 < 0,001$ , temos que  $E < 0,001$ .

Assim, o valor é exato até a segunda casa decimal.

Resposta: a) Aproximadamente 0,955; b) Demonstração.

**07**

- a) Resolva as equações  $f(x) = 0$  e  $g(x) = 0$ .
- b) Faça um esboço dos gráficos das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ .

**Resolução**

a)  $f(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1 = 0 \Rightarrow x^4 - 12x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{2} \Rightarrow x^2 = 6 \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$$

b) Análise de  $f(x)$ :

raízes:  $-\sqrt{2}$  e  $\sqrt{2}$  (item a)

vértice:  $x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{0}{-1} \Rightarrow x_v = 0$

$$y_v = f(x_v) \Rightarrow y_v = 1 - \frac{0^2}{2} \Rightarrow y_v = 1$$

Análise de  $g(x)$ :

raízes:  $-\sqrt{6+2\sqrt{3}}$ ,  $-\sqrt{6-2\sqrt{3}}$ ,  $\sqrt{6-2\sqrt{3}}$  e  $\sqrt{6+2\sqrt{3}}$  (item a)

Extremantes:

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \Rightarrow g'(x) = -x + \frac{x^3}{6} \Rightarrow g''(x) = -1 + \frac{x^2}{2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -x + \frac{x^3}{6} = 0 \Rightarrow x \left( -1 + \frac{x^2}{6} \right) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{6} \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{6}$$

Temos assim:

$$g''(-\sqrt{6}) > 0 \Rightarrow x = -\sqrt{6} \text{ é minimante}$$

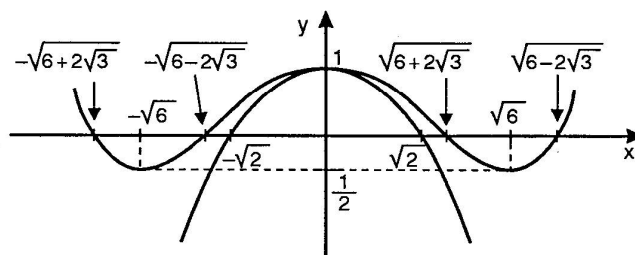
$$g''(0) < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ é maximante}$$

$$g''(\sqrt{6}) > 0 \Rightarrow x = \sqrt{6} \text{ é minimante}$$

Ainda:

$$g(-\sqrt{6}) = -\frac{1}{2}, g(0) = 1 \text{ e } g(\sqrt{6}) = -\frac{1}{2}$$

Assim, os gráficos são:



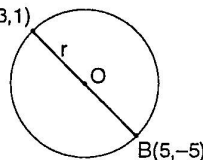
Resposta: a) O conjunto solução de  $f(x) = 0$  é  $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ; o de  $g(x) = 0$  é  $\{-\sqrt{6+2\sqrt{3}}, -\sqrt{6-2\sqrt{3}}, \sqrt{6-2\sqrt{3}}, \sqrt{6+2\sqrt{3}}\}$ ; b) gráfico.

**08**

- a) As extremidades de um diâmetro de uma circunferência são  $(-3, 1)$  e  $(5, -5)$ . Determine a equação da circunferência.
- b) Determine a equação da circunferência que passa pelo ponto  $(9, \sqrt{3})$  e que é tangente às retas  $y = 0$  e  $y = \sqrt{3}x$ .

**Resolução**

a)  $A(-3,1)$



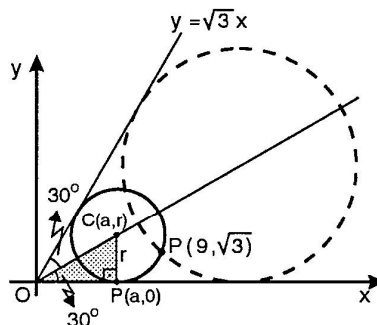
$$x_0 = \frac{-3+5}{2} = 1$$

$$y_0 = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$r = OA = \sqrt{(-3-1)^2 + (1+2)^2} \Rightarrow r = 5$$

Assim, a equação é:  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

b)



Sendo  $P(a,0)$  a intersecção da circunferência em questão com o eixo das abscissas, o centro da circunferência é  $C(a,r)$ . A reta de equação  $y = \sqrt{3}x$  tem inclinação  $60^\circ$ .

Assim, no  $\triangle OPC$ :

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{r}{a} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Como  $d_{PC} = r$  e  $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , temos:

$$d_{PC} = r \Rightarrow (d_{PC})^2 = r^2 \Rightarrow (9-a)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 20a + 84 = 0 \Rightarrow a = 6 \text{ ou } a = 14.$$

Assim, existem duas circunferências,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , que satisfazem as condições do enunciado:

Para  $a = 6$ :  $C_1(6, 2\sqrt{3})$  e  $r_1 = 2\sqrt{3}$

$$\therefore (\lambda_1) \quad (x-6)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 12$$

Para  $a = 14$ :  $C_2(14, \frac{14\sqrt{3}}{3})$  e  $r_2 = \frac{14\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore (\lambda_2) \quad (x-14)^2 + \left(y - \frac{14\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{196}{3}$$

Resposta: a)  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ ;

b)  $(x-6)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 12$  ou  $(x-14)^2 + \left(y - \frac{14\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{196}{3}$

**09** Considere um polinômio não nulo  $p(x)$  tal que  $(p(x))^3 = x^2 p(x) = x p(x^2)$  para todo  $x$  real.

a) Qual é o grau de  $p(x)$ ?

b) Determine  $p(x)$ .

**Resolução**

a) Sendo  $n$  o grau de  $p(x)$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{grau de } (p(x))^3 = 3n \\ \text{grau de } x^2 \cdot p(x) = 2 + n \\ \text{grau de } x \cdot p(x^2) = 1 + 2n \end{array} \right\} \Rightarrow 3n = n + 2 = 1 + 2n \Rightarrow n = 1$$

Assim, o grau de  $p(x)$  é 1.

b)  $p(x) = ax + b$   $\left\{ \begin{array}{l} (p(x))^3 = x \cdot p(x^2) \end{array} \right\} \Rightarrow (ax + b)^3 = x \cdot (ax^2 + b) \Rightarrow$

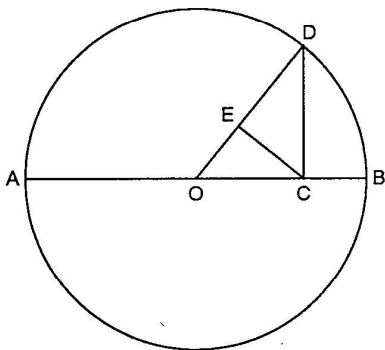
$$\Rightarrow a^3 x^3 + 3a^2 b x^2 + 3ab^2 x + b^3 = ax^3 + bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 = a \\ 3a^2 b = 0 \\ 3ab^2 = b \\ b^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1 \text{ e } b = 0$$

$$\therefore p(x) = x \text{ ou } p(x) = -x$$

Resposta: a) 1; b)  $p(x) = x$  ou  $p(x) = -x$

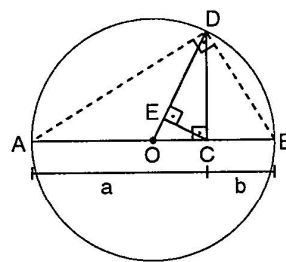
**10** Na figura,  $AC = a$  e  $BC = b$ ,  $O$  é o centro da circunferência,  $CD$  é perpendicular a  $AB$  e  $CE$  é perpendicular a  $OD$ .



a) Calculando  $\frac{1}{ED}$  em função de  $a$  e  $b$ , prove que  $ED$  é média harmônica de  $a$  e  $b$ .

b) Comprove na figura que:  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > ED$

**Resolução**



a) O  $\triangle ABD$  é retângulo em  $D$  pois  $AB$  é diâmetro, assim:

$$CD^2 = AC \times CB \Rightarrow CD^2 = a \cdot b \Rightarrow CD = \sqrt{ab}$$

$$OD = \text{raio} \Rightarrow OD = \frac{AB}{2} \Rightarrow OD = \frac{a+b}{2}$$

No  $\triangle ODC$ , retângulo em  $C$ , temos:

$$CD^2 = ED \times OD \Rightarrow (\sqrt{a \cdot b})^2 = ED \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ED} = \frac{a+b}{2ab} \Rightarrow \frac{1}{ED} = \frac{a}{2ab} + \frac{b}{2ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ED} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{2} \Rightarrow ED = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow ED = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Assim,  $ED$  é a média harmônica de  $a$  e  $b$ .

b) No  $\triangle OCD$ :

$$O\hat{C}D > C\hat{O}D \Rightarrow CD < OD \Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \quad (I)$$

No  $\triangle ECD$ :

$$C\hat{E}D > E\hat{C}D \Rightarrow CD > ED \Rightarrow \sqrt{ab} > ED \quad (II)$$

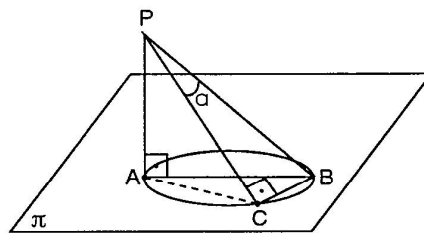
de (I) e (II):  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > ED$

**11** Dada uma circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ , levanta-se por  $A$  um segmento  $\overline{AP}$  perpendicular ao plano da circunferência e une-se  $P$  a um ponto  $C$  qualquer da circunferência,  $C$  distinto de  $B$ .

a) Prove que as retas  $BC$  e  $PC$  são perpendiculares.

b) Sabendo que  $AB = AP = 8$  e que  $C$  é o ponto médio do arco  $AB$ , determine a medida do ângulo  $CPB$ .

**Resolução**



a) Há dois casos a considerar:

I)  $C \equiv A$

Neste caso, pelo enunciado, é imediato que  $\overline{BC} \perp \overline{PC}$

II) Sendo  $\pi$  o plano da circunferência, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PA} \perp \pi \text{ e } \overline{AC} \subset \pi \Rightarrow \overline{PA} \perp \overline{AC} \\ \triangle ABC \text{ retângulo em } C \Rightarrow \overline{BC} \perp \overline{CA} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{BC} \perp \overline{PC} \quad \text{(Teorema das três)} \\ \text{perpendiculares)}$$

b) No  $\triangle ABP$ , temos:  $PB^2 = AB^2 + 8^2 \Rightarrow PB = 8\sqrt{2}$

No  $\triangle ABC$ , temos:  $AC^2 + CB^2 = 8^2 \Rightarrow CB = 4\sqrt{2}$  (pois  $AC = OB$ )

No  $\Delta PBC$ , temos:  $\text{sen } \alpha = \frac{CB}{CP} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ (pois } \alpha < 90^\circ \text{)}$$

Resposta: a) Demonstração; b)  $30^\circ$

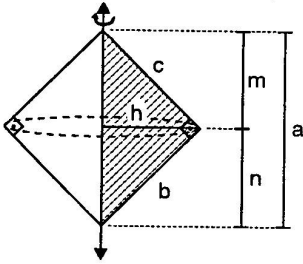
**12** Considere um triângulo retângulo com hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ .

Sejam  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_c$  os volumes dos sólidos gerados pela rotação do triângulo em torno dos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente.

- a) Calcule  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  em função das medidas de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .  
 b) Escreva  $aV_a$  em função de  $b$ ,  $c$ ,  $V_b$  e  $V_c$ .

**Resolução**

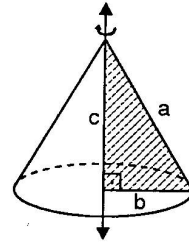
a)



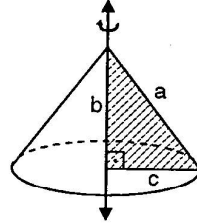
$$V_a = \frac{\pi \cdot h^2 \cdot m}{3} + \frac{\pi \cdot h^2 \cdot n}{3} \Rightarrow V_a = \frac{\pi \cdot h^2}{3}(m+n)$$

Como  $a \cdot h = b \cdot c$  e  $m+n = a$ , temos:

$$V_a = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^2 \cdot a \Rightarrow V_a = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot c^2}{3a}$$



$$V_c = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot c}{3}$$



$$V_b = \frac{\pi \cdot c^2 \cdot b}{3}$$

b)  $V_a = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot c^2}{3a} \Rightarrow a \cdot V_a = \frac{\pi}{3} \cdot b^2 \cdot c^2$  (1)

$$V_b = \frac{\pi \cdot c^2 \cdot b}{3} \Rightarrow c^2 = \frac{3 \cdot V_b}{\pi b}$$
 (2)

$$V_c = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot c}{3} \Rightarrow b^2 = \frac{3 \cdot V_c}{\pi \cdot c}$$
 (3)

Substituindo (2) e (3) em (1), temos:

$$a \cdot V_a = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3 \cdot V_b}{\pi \cdot b} \cdot \frac{3 \cdot V_c}{\pi \cdot c} \Rightarrow a \cdot V_a = \frac{3 \cdot V_b \cdot V_c}{\pi \cdot b \cdot c}$$

Obs: A expressão (1)  $a \cdot V_a = \frac{\pi}{3} \cdot b^2 \cdot c^2$  também é uma função de  $b$ ,  $c$ ,  $V_b$  e  $V_c$ .

**Cortesia: Resoluções MED Vestibulares**

**Geografia: Antônio Cavenaghi e Carlos Alberto Regalo**

**Matemática: Arnaldo William Pinto e Francisco C. de Souza**